Feuille d'exercices 1 : Actions de groupes

Exercice 1. Soit H le sous-groupe de S_4 engendré par les transpositions $(1,2)$ et $(3,4)$. On fait agir H sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Déterminer les orbites et les stabilisateurs pour cette action.

Exercice 2. Soit G un groupe. Montrer que la cardinalité de toute classe de conjugaison de G divise l'ordre de G.

Exercice 3. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Montrer que pour tout $x \in E$ et pour tout $g \in G$ on a

$$\operatorname{Stab}_G(g \cdot x) = g \operatorname{Stab}_G(x) g^{-1}.$$

Exercice 4. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Montrer que pour tous $x, y \in E$, si $\operatorname{Orb}_G(x) = \operatorname{Orb}_G(y)$, alors $\operatorname{Stab}_G(x)$ et $\operatorname{Stab}_G(y)$ sont des sous-groupes conjugués.

Exercice 5. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E tel que l'action possède une et une seule orbite. Soient $x, y \in E$.

a. Montrer que $\{g \in G : g \bullet x = y\}$ est un classe à gauche de $\operatorname{Stab}_G(x)$.

b. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G/\operatorname{Stab}_G(x) \\ y & \longmapsto & \{g \in G : g \bullet x = y\} \end{array}$$

est une bijection.

Exercice 6. Soit G un groupe fini d'ordre 21 agissant sur un ensemble E.

a. Quels sont les cardinaux possibles des orbites pour cette action ?

b. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note n_i le nombre d'orbites à i éléments. Montrer que

$$|E| = n_1 + 3n_3 + 7n_7 + 21n_{21}.$$

c. On suppose que $|E| = 11$. Montrer qu'il y a au moins un point fixe pour l'action de G sur E.

d. On suppose que $|E| = 19$ et qu'il n'y a pas de point fixe pour l'action de G sur E. Calculer le nombre d'orbites dans E sous l'action de G.

Exercice 7. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G, et $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

a. Montrer que l'application définie par

$$\begin{gathered} G \times \mathcal{P}(G) \longrightarrow \mathcal{P}(G) \\ g \cdot A = \{ga : a \in A\} \end{gathered}$$

est une action de G sur $\mathcal{P}(G)$.

b. Montrer que $\mathrm{Orb}_G(H) = G/H$.

c. Montrer que $\mathrm{Stab}_G(H) = H$.

d. En déduire que $|\mathrm{Orb}_G(H)| = [G : H]$.

Exercice 8. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G, et $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

a. Montrer que l'application définie par

$$\begin{gathered} G \times \mathcal{P}(G) \longrightarrow \mathcal{P}(G) \\ g \cdot A = gAg^{-1} = \left\{gag^{-1} : a \in A\right\} \end{gathered}$$

est une action de G sur $\mathcal{P}(G)$.

b. Montrer que $\mathrm{Orb}_G(H) = \{gHg^{-1} : g \in G\}$.

c. Montrer que $\mathrm{Stab}_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$.

d. Montrer que $H \triangleleft \mathrm{Stab}_G(H)$.

e. En déduire que $H \triangleleft G$ ssi $\mathrm{Stab}_G(H) = G$.

Exercice 9. Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G.

a. Montrer que

$$\begin{gathered} G \times G/H \longrightarrow G/H \\ g \cdot (g'H) = (gg')H \end{gathered}$$

est une action de G sur G/H. *(Il faut montrer aussi que l'application est bien définie !)*

b. Pour $g \in G$ on définit

$$\begin{aligned} t_g : G/H &\longrightarrow G/H \\ g'H &\longmapsto g \cdot (g'H) = (gg')H \end{aligned}$$

pour tout $gH \in G/H$. Montrer que t_g est une application bien définie et bijective.

c. Montrer que l'application $f : G \to S_{G/H}$ définie par $f(g) = t_g$ est un morphisme de groupes *(rappel : si E est un ensemble, alors S_E note le groupe de permutations de E).*

d. Montrer que le noyau de f est

$$\ker(f) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

e. En déduire que $\ker(f) = H$ ssi H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 10. Soient G un groupe fini non trivial dont l'élément neutre est noté e, p un nombre premier quelconque et

$$E = \{(g_1, g_2, \ldots, g_p) : g_1, g_2, \ldots, g_p \in G \text{ et } g_1 g_2 \cdots g_p = e\}.$$

a. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit sur E par

$$\bar{1} \bullet (g_1, g_2, g_3, \ldots, g_p) = (g_2, g_3, \ldots, g_p, g_1).$$

b. Montrer que l'ensemble de points fixes pour l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E est

$$\{\underbrace{(g, g, \ldots, g)}_{p} : g \in G \text{ et } g^p = e\}.$$

c. Montrer que la cardinalité de E est $|G|^{p-1}$.

d. En déduire que

$$|G|^{p-1} \equiv |\{g \in G : g^p = e\}| \pmod{p}. \tag{1}$$

Exercice 11. Déduire le *théorème de Cauchy* à partir (1).

> *Théorème de Cauchy :* Si G est un groupe fini non trivial et p est un nombre premier qui divise $|G|$, alors il existe un élément d'ordre p dans G.

Exercice 12. Déduire à partir de (1) (avec $G = S_p$, le groupe symétrique) :

> *Théorème de Wilson* : Si p est un nombre premier, alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Exercice 13. Soit G un groupe fini non trivial dont l'élément neutre est noté e et tel que pour tous $a, b \in G$ différent de e, il existe un élément c de G tel que $a = cbc^{-1}$.

a. Montrer que si $a, b \in G$ sont tels que $a \neq e$ et $b \neq e$, alors a et b sont du même ordre.

b. En déduire que G est un p-groupe, où p est un nombre premier. (*Théorème de Cauchy*)

c. Montrer que G possède deux classes de conjugaison.

d. En déduire que G est un groupe d'ordre 2.