Feuille d'exercices 11 : Produits tensoriels

Exercice 1. Soient A et B deux matrices orthogonales. Montrer que $A \otimes B$ est orthogonale.

Exercice 2. Soient $u \in \mathbb{C}^n$ et $v \in \mathbb{C}^m$ deux vecteurs non-nuls. Montrer que le rang de la matrice $u \otimes v^t$ est égal à 1.

Exercice 3. Soient V et W deux espaces vectoriels. Montrer que le produit tensoriel $V \otimes W$ vérifie la propriété suivante.

> (Propriété universelle du produit tensoriel) *Pour tout espace vectoriel U et pour toute application bilinéaire $\beta : V \times W \to U$, il existe une unique application linéaire $\ell : V \otimes W \to U$ telle que $\beta(v, w) = \ell(v \otimes w)$ pour tous $v \in V$ et $w \in W$.*

Exercice 4. Soient V et W des espaces vectoriels. Montrer que si $\dim(W) = 1$, alors $V \otimes W \cong V$.

Exercice 5. Soient G un groupe fini, et V et W des G-modules sur $\mathbb{C}$ tels que $\dim(W) = 1$. Montrer que $V \otimes W$ est un G–module simple ssi V est un G–module simple.

Exercice 6. Soient U, V, W des espaces vectoriels. Montrer que

$$(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W).$$

Exercice 7. Soient G un groupe fini, V un G–module et $g \in G$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres de g sur V. Calculer les valeurs propres de g sur $S(V \otimes V)$ et $A(V \otimes V)$.

Exercice 8. Soient V_{triv}, V_{signe} et V_{std} les S_4–modules trivial, signe et standard, resp.

a. Calculer les caractères et les dimensions des S_4–modules suivants :
- $S(V_{\text{triv}} \otimes V_{\text{triv}})$
- $A(V_{\text{signe}} \otimes V_{\text{signe}})$
- $A(V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}})$
- $S((V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{signe}}) \otimes (V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{signe}}))$

b. Déterminer si les S_4–modules ci-dessus sont simples.

Exercice 9. Soient V et W deux G–modules sur un corps $\mathbb{K}$ et soit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ l'ensemble des applications $\mathbb{K}$-linéaires de V vers W.

a. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, muni de l'opération suivante, est un G–module.

$$(g \cdot \varphi)(v) = g(\varphi(g^{-1}v)) \text{ pour } \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \text{ et } g \in G.$$

b. Calculer le caractère du G–module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

c. Rappeler que le corps $\mathbb{K}$ et un G–module (le module trivial), où $g \cdot k = k$ pour tout $k \in \mathbb{K}$ et pour tout $g \in G$. Calculer le caractère du G–module $W \otimes V^*$, où $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$.

d. En déduire que l'on a un isomorphisme de G–modules : $W \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.