Feuille d'exercices 12 : Induction / Restriction de Représentations

Exercice 1. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres complexes. Une *matrice de Vandermonde* et une matrice de la forme suivante :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que le déterminant de V et

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Exercice 2. Soient H le sous-groupe de S_3 engendré par la permutation $c = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et ρ la représentation de H définie par

$$\begin{aligned} \rho : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ c &\longmapsto e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{aligned}$$

Soit $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ la représentation de S_3 induite par ρ.

a. En déduire que la dimension de $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ est égale à 2.

b. Calculer les matrices de tout élément $\sigma \in S_3$ dans la représentation $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$. Par exemple, la matrice de la permutation $c = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{pmatrix}.$$

c. Calculer le caractère de $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$:

(a) en utilisant les matrices obtenue dans la partie précédente ; et

(b) à l'aide de la formule d'un caractère induit.

d. Exprimer le caractère de $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ comme somme de caractères irréductibles.

e. Exprimer le caractère de $\mathrm{Res}_{S_2}^{S_3}(\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho))$ comme somme de caractères irréductibles de S_2, où on identifie S_2 avec le sous-groupe de S_3 engendré par la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.