Feuille d'exercices 2 : Théorèmes de Sylow

Exercice 1. Montrer que si S et T sont des p–sous-groupes de Sylow d'un groupe G, alors S et T sont isomorphes.

Exercice 2. Montrer que tout groupe d'ordre 40 possède un sous-groupe normal.

Exercice 3. Montrer que tout groupe G d'ordre 105 possède un 5–sous-groupe de Sylow normal ou un 7–sous-groupe de Sylow normal.

Exercice 4. Soit G un groupe d'ordre $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ qui ne possède pas de sous-groupe normal propre. Combien a-t-il de sous-groupes d'ordre 7 ? et d'éléments d'ordre 7 ?

Exercice 5. Soit G un groupe d'ordre $495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Montrer que G possède un sous-groupe normal d'ordre 5 ou un sous-groupe normal d'ordre 11.

Exercice 6. Soit G un group d'ordre $|G| = 108$. Montrer que G possède un sous-groupe normal d'ordre 9 ou un sous-groupe normal d'ordre 27.

Exercice 7.

a. Calculer le nombre de 2-sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_4.

b. Calculer le nombre de 3-sous-groupes de Sylow du groupe symétrique S_4.

Exercice 8. Soient G un groupe et $Z(G)$ le centre de G :

$$Z(G) = \{h \in G : gh = hg \text{ pour tout } g \in G\}.$$

a. Montrer que si $G/Z(G)$ est un groupe monogène, alors G est un groupe abélien.

b. Soit p un nombre premier. Montrer que si $|G| = p^2$, alors G est un groupe abélien.

Exercice 9. Soit N un sous-groupe normal d'un groupe fini G. Montrer que si N contient un p–sous-groupe de Sylow de G, alors le nombre de p–sous-groupe de Sylow de N est ègal au nombre de p–sous-groupe de Sylow de G.

Exercice 10. L'objectif de ce problème est de montrer :

Si P est un p–sous-groupe de Sylow de G et H est un sous-groupe normal de G, alors $P \cap H$ est un p–sous-groupe de Sylow de H.

Soient H un sous-groupe normal d'un groupe fini G et P un p–sous-groupe de Sylow de G.

a. Montrer qu'il existe $Q \leq H$ tel que Q est un p–sous-groupe de Sylow de H et

$$P \cap H \subseteq Q.$$

b. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que

$$Q \subseteq gPg^{-1} \cap H.$$

c. Montrer que

$$P \cap H \subseteq Q \subseteq g(P \cap H)g^{-1}.$$

d. En déduire que $P \cap H$ est un p–sous-groupe de Sylow de H.