Feuille d'exercices 3 : Groupes symétriques

Exercice 1.

a. Donner un exemple d'un homomorphisme non-trivial de $\mathbb{Z}$ dans S_3.

b. Est-il possible de construire un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}$ dans S_3 ?

Exercice 2. Soient α et β les deux permutations suivantes.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Calculer les sous-groupes $\langle\alpha\rangle$, $\langle\beta\rangle$, et $\langle\alpha,\beta\rangle$ de S_4.

b. Montrer que $\langle\alpha,\beta\rangle$ et $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ sont isomorphes.

c. Déterminer tous les homomorphismes de $\langle\alpha,\beta\rangle$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Pour chaque homomorphisme, déterminer son noyau et son image.

Exercice 3. Soit $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l)$ un cycle dans S_n. La *longueur* de α est l. Le support de α est l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l\}$. On dit que deux cycles sont à *disjoint* si leurs supports sont disjoint.

a. Montrer que $\alpha^{-1} = (a_l, a_{l-1}, \ldots, a_2, a_1)$.

b. Montrer que l'ordre de α est l. Montrer que l'ordre de α^{-1} est l.

c. Montrer que si α est un cycle de longueur impair, alors α^2 est aussi un cycle.

d. Montrer que $\alpha\beta = \beta\alpha$ si α et β sont des cycles à supports disjoints.

e. Soit σ une permutation quelconque dans S_n. Montrer que

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_l)) .$$

f. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que σ se décompose de manière unique en produit de cycles disjoints (à l'ordre des facteurs près). Par example, pour la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

on a

$$\sigma = (1,3,5,6)(2,4,7,8).$$

g. Le *type cyclique* d'une permutation σ est le partage de n donnée par les longueurs des cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles disjoints. Montrer que deux permutations sont conjugués ssi ils ont le même type cyclique.

h. Montrer que σ et son inverse σ^{-1} sont conjugués.

i. Soit σ une permutation dans S_n, où $n \geq 3$. Montrer que si $\sigma\omega = \omega\sigma$ pour tout $\omega \in S_n$, alors σ est l'élément neutre de S_n.

Exercice 4. Montrer que toute permutation de S_n se décompose en produit des permutations suivantes :

a. $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, ..., $(1,n)$. (*Indice :* $(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (a_1, a_p)(a_1, a_{p-1}) \cdots (a_1, a_2)$.)

b. $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, ..., $(n-1,n)$. (*Indice :* $(3,4) = (1,3)(1,4)(1,3)^{-1}$.)

c. $(1,2)$, $(1,2,3,\ldots,n)$.

d. $(1,2)$, $(2,3,\ldots,n)$.

(Autrement dit, les ensembles ci-dessus sont des parties génératrices de S_n.)

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. On appelle *signature d'une permutation* $\omega \in S_n$ le nombre

$$\operatorname{sign}(\omega) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\omega(i) - \omega(j)}{i - j},$$

où le produit porte sur tous les couples (i,j) tels que $i < j$. Par exemple, pour $\omega = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= \left(\frac{\omega(1) - \omega(2)}{1-2}\right) \times \left(\frac{\omega(1) - \omega(3)}{1-3}\right) \times \left(\frac{\omega(2) - \omega(3)}{2-3}\right) \\
&= \left(\frac{2-3}{1-2}\right) \times \left(\frac{2-1}{1-3}\right) \times \left(\frac{3-1}{2-3}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

a. Une *inversion* de $\omega \in S_n$ est un couple (i,j) tel que $1 \leq i < j \leq n$ et $\omega(i) > \omega(j)$. Soit $\operatorname{inv}(\omega)$ l'ensemble d'inversions de ω. Montrer que $\operatorname{sign}(\omega) = (-1)^{|\operatorname{inv}(\omega)|}$.

b. Calculer la signature de tous les éléments de S_3.

c. Montrer que toute transposition de S_n est de signature -1.

d. Montrer que sign est un homomorphisme de S_n dans le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$. (*Indice : on peut le faire directement ou à l'aide d'une présentation de* S_n.)

e. Une *permutation paire* est une permutation qui peut être exprimée comme le produit d'un nombre pair de transpositions ; une *permutation impaire* est une permutation qui peut être exprimée comme le produit d'un nombre impair de transpositions. Montrer que $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ si σ est paire ; et $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ si σ est impaire.

f. L'ensemble des permutations paires dans S_n forme le *groupe alterné* A_n. Montrer que A_n est un sous-groupe normal de S_n.

g. Montrer que $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

h. Montrer que A_n est engendré par tous les cycles de longueur 3 (tout d'aborad, remarquer qu'il suffit de montrer de deux transpositions est un produit de cycles de longueurs 3 ; ensuite, montrer que $(a,b)(a,b) = id$; $(a,b)(b,c) = (a,b,c)$; et $(a,b)(c,d) = (a,b,c)(b,c,d)$).

i. Montrer que A_4 est engendré par les cycles $(1,2,3)$ et $(2,3,4)$. Calculer le graphe de Cayley de A_4 pour la partie génératrice $\{(1,2,3),(2,3,4)\}$.