Feuille d'exercices 4 : Groupes par générateurs et relations, Algorithme de Todd et Coxeter

Exercice 1. Soit $G = \langle a, b, c \mid a^3, b^3, c^4, acac^{-1}, aba^{-1}bc^{-1}b^{-1} \rangle$. Montrer que G est trivial. *(Considérer* $(aba^{-1})^3 = (bcb^{-1})^3$*.)*

Exercice 2. Soit $G = \langle s, t \mid t^{-1}s^3t = s^5 \rangle$. Montrer que l'élément

$$s^{-1}t^{-1}s^{-1}tst^{-1}st \in G$$

appartient à $\ker(f)$ pour tout homomorphisme de groupes $f : G \to G'$ avec G' fini.

Exercice 3. Soient $G = \langle x, y \mid x^3, y^3, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$ et $H = \langle x \rangle$. Calculer une représentation par permutations de l'action de G par multiplicaion à droite sur $H \backslash G$.

Exercice 4. Soient $G = \langle x, y \mid x^2, y^3, (xy)^3 \rangle$ et $H = \langle xy \rangle$. Déterminer $[G : H]$ et une représentation par permutations de l'action de G sur $H \backslash G$.

Exercice 5. Soient $G = \langle x, y \mid x^2y^2, x^3y^5 \rangle$ et $H = \langle 1 \rangle$. Déterminer $[G : H]$ et une représentation par permutations de l'action de G sur $H \backslash G$.

Exercice 6. Soient $G = \langle a, b, c, d, e \mid ab = c, bc = d, cd = e, de = a, ea = b \rangle$ et $H = \langle a \rangle$. Déterminer $[G : H]$ et une représentation par permutations de l'action de G sur $H \backslash G$.

Exercice 7. Soient $G = \langle x, y \rangle$ et $H = \langle x, y^2, yxyx^{-1}y^{-1}, yx^2yx^{-3}y^{-1}, yx^4y^{-1}, yx^3yx^{-2}y^{-1} \rangle$. Montrer que $[G : H] = 5$.

Exercice 8. Montrer que $G = \langle x, y \mid x^2y^2, y^{-1}xyx^{-3} \rangle$ est un groupe d'ordre 8.

Exercice 9. Soient $G = \langle x, y \mid x^3, y^5, (xy)^2 \rangle$ et $H = \langle xy, x^{-1}y^{-1}xyx \rangle$. Déterminer $[G : H]$ et une représentation par permutations de l'action de G sur $H \backslash G$.

Exercice 10. Soient $G = \langle x, y \mid x^3, y^5, (xy)^2 \rangle$ et $H = \langle x, yx^{-1}y^2 \rangle$.

a. Montrer que $[G : H] = 5$.

b. Soient $a = x$ et $b = yx^{-1}y^2$ les générateurs de H. Montrer que $a^3 = b^3 = (ab)^2 = 1$.

c. En déduire que $|H| \leq 12$.

d. Montrer que $|G| = 60$ et que $G \cong A_5$.

Exercice 11. (*Propriété universelle de* $\ker(f)$)

Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de groupes abéliens. On montrera que le noyau K de f est caractérisé par la propriété suivante :

(i) il existe un homomorphisme de groupes abéliens $\ell : K \to M$ tel que $f \circ \ell = 0$; et

(ii) si $\ell' : K' \to M$ est un homomorphisme de groupes abéliens tel que $f \circ \ell' = 0$, alors il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $u : K' \to K$ tel que $\ell' = \ell \circ u$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\ell"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ K' \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "\ell'"'] & & \end{tikzcd}$$

Explicitement :

a. Montrer que le noyau de f vérifie les conditions (i) et (ii).

b. Montrer que si K est un groupe abélien qui vérifie (i) et (ii), alors $K \cong \ker(f)$.