Feuille d'exercices 5 : Représentations, G-modules et sous-modules

Exercice 1. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une représentation matricielle de G de degré n. Montrer que l'application $g \mapsto \det(\rho(g))$ est une représentation de G de degré 1.

Exercice 2. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une représentation matricielle d'un groupe fini G. On définit l'application $\rho^* : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^\top$, où $M^\top$ désigne la transposée d'une matrice M. Montrer que ρ^* est une représentation matricielle de G de dimension n.

Exercice 3. Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et U et W deux sous-espace de V tels que $V = U \oplus W$. On définit l'application $\mathrm{proj}_U : V \to V$ par $\mathrm{proj}_U(u + w) = u$ pour tout $u \in U$ et tout $w \in W$.

a. Montrer que $\mathrm{proj}_U \in \mathrm{End}(V)$.

b. Montrer que l'image de proj_U est U.

c. Montrer que le noyau de proj_U est W.

d. Montrer que $\mathrm{proj}_U^2 = \mathrm{proj}_U$.

Exercice 4. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Une transformation linéaire $\pi : V \to V$ est une *projection* si $\pi \circ \pi = \pi$. Soit $\pi : V \to V$ une projection. Montrer que $V = \mathrm{im}(\pi) \oplus \ker(\pi)$.

Exercice 5. Soit V un G-module. L'ensemble des *invariants (ou G-invariants)* de V est

$$V^G = \{v \in V : gv = v \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Montrer que V^G est un sous-module de V.

Exercice 6. Soient S_n le groupe symétrique sur n éléments et $\mathbb{K}S_n$ son module régulier. Alors, $\mathbb{K}S_n$ possède une base $\mathcal{B} = \{v_\tau : \tau \in S_n\}$ indexée par les éléments de S_n dont l'action de $\sigma \in S_n$ est donné par $\sigma \cdot v_\tau = v_{\sigma\circ\tau}$. Montrer que le sous-espace engendré par l'élément $\sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sign}(\tau) v_\tau$ est un sous-module de $\mathbb{K}S_n$.

Exercice 7. Soient U et W deux sous-modules d'un G-module V.

a. Montrer que $U \cap W$ est un sous-module de V.

b. Montrer que $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ est un sous-module de V.

c. Montrer que $V = U \oplus W$ ssi $V = U + W$ et $U \cap W = \{0\}$.

Exercice 8. Soit U un sous-module d'un G-module V. Montrer que l'espace vectoriel quotient V/U muni de la multiplication $g \cdot (v + U) = (g \cdot v) + U$ est un G-module.