Feuille d'exercices 6 : Représentations irréductibilités

Exercice 1. Soit D_4 le groupe des isométries du carré à sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

a. Choisir une base de $\mathbb{R}^2$ et exprimer les isométries dans cette base.

b. Déterminer si cette représentation matricielle de D_4 est irréductible.

Exercice 2. Soit G le groupe avec présentation

$$G = \left\langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle .$$

a. Montrer que

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \rho(b) = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

se prolonge en une représentation de G.

b. Déterminer si ρ est une représentation irréductible de G.

Exercice 3. Le groupe symétrique S_4 est engendré par les permutations $\sigma = 2134$, $\tau = 2341$.

a. Montrer que

$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \rho(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

se prolonge en une représentation matricielle de S_4.

b. Montrer que ρ est une représentation irréductible de S_4.

Exercice 4. Montrer que la restriction de la représentation standard de S_3 au sous-groupe engendré par le cycle $(1,2,3)$ n'est pas irréductible.

Exercice 5. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(V)$ une représentation complexe d'un groupe fini G. Montrer que s'il existe $g, h \in G$ tels que $\rho(g)\rho(h) \neq \rho(h)\rho(g)$, alors ρ est irréductible.

Exercice 6. Soient G un groupe fini et V un G-module sur $\mathbb{C}$ de dimension 3. Montrer que V est simple ssi il n'existe pas un vecteur $v \in V$ tel que $gv \in \mathbb{C}v$ pour tout $g \in G$.

Exercice 7. Soient $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes surjectif et $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible de H. Montrer que $\rho \circ \varphi : G \to GL(V)$ est une représentation irréductible de G.

Exercice 8. Soit $\varphi : G/N \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation du groupe quotient G/N, où N est un sous-groupe normal d'un groupe G.

a. Montrer que $\tilde{\varphi} : G \to \mathrm{GL}(V)$ défini par $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(gN)$ est une représentation de G.

b. Montrer que φ est irréductible ssi $\tilde{\varphi}$ est irréductible.