Feuille d'exercices 7 : Théorème de Maschke

Exercice 1. Soit V un espace vectorial sur $\mathbb{C}$. Un *produit scalaire complexe* sur V est un application

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u,v) & \longmapsto & \langle u, v\rangle \end{array}$$

telle que

- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, où $\overline{z}$ dénote le conjugué complexe d'un nombre complexe z ;
- $\langle \alpha u + \alpha' u', v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \alpha'\langle u', v\rangle$ pour $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$ et $u, u', v \in V$;
- $\langle u, u\rangle > 0$ si $u \neq 0$.

Étant donné une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, on définit une application $V \times V \to \mathbb{C}$ par

$$(u, v) = \sum_{g\in G} \langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle \,.$$

a. Vérifier que cette application est un produit scalaire complexe sur V.

b. Montrer que $(u, v) = (\rho(g)u, \rho(g)v)$ pour tout $g \in G$ et tous $u, v \in V$.

c. Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle les matrices $X(g)$ associées aux éléments g de G vérifient $X(g^{-1}) = \overline{X(g)^t}$.

d. Soit W un sous-module de V. On définit

$$W^\perp = \{v \in V : (v, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

Montrer que $W^\perp$ est un sous-module de V.

e. En déduire la version suivante du Théorème de Maschke : si W est un sous-module de V, alors il existe un sous-module U de V tel que $V = W \oplus U$.

Exercice 2. (Contre-example au Théorème de Maschke dont la caractèristique du corps divise l'ordre du groupe.)

Soient p un nombre premier, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $C_p = \{1, g, g^2, \ldots, g^{p-1}\}$ le groupe cyclique à p éléments. Soit $\varphi : C_p \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ l'application défini par

$$\varphi(g^j) = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

a. Montrer que $V = \mathbb{F}_p^2$ est un C_p-module de dimension 2.

b. Montrer que le sous-espace U de V engendré par e_1 est un sous-module de V.

c. Montrer que U n'a pas de sous-module supplémentaire. Autrement dit, montrer qu'il n'existe pas de sous-module W de V tel que $V = U \oplus W$.

Exercice 3. (Contre-example au Théorème de Maschke dont le groupe est infini.)

Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs muni du produit usuel. Définir une fonction $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} 1 & \log(r) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout $r \in \mathbb{R}^+$.

a. Montrer que ρ est un représentation matricielle de $\mathbb{R}^+$.

b. Soit W le sous-espace de $\mathbb{C}^2$ défini comme $W = \{\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : c \in \mathbb{C}\}$. Montrer que W est stable relativement à la représentation ρ ; c'est-à-dire, montrer que $\rho(r)w \in W$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ et tout $w \in W$.

c. Montrer qu'il n'existe pas de sous-espace $U \subset \mathbb{C}^2$ stable relativement à l'action de ρ tel que $\mathbb{C}^2 \cong W \oplus U$. (Suggestion : exprimer $\rho(r)$ dans une base différente.)