Feuille d'exercices 8 : Sous-groupe dérivé

Exercice 1. Soient $G' = [G, G]$ le sous-groupe dérivé de G et $Ab(G) = G/G'$ son abélianisé.

a. Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation complexe de G de dimension 1, alors l'application $\bar{\rho}$ défini par $\bar{\rho}(gG') = \rho(g)$ est une représentation irréductible de $Ab(G)$.

b. Si $\varphi : Ab(G) \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation complexe irréductible de $Ab(G)$, alors l'application $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(gG')$ est une représentation complexe de G de dimension 1.

c. En déduire qu'il y a une bijection entre les représentations complexes de dimension 1 de G est les représentations complexes irréductibles de $Ab(G)$.

Exercice 2. Sachant que le sous-groupe dérivé de S_n est le group alterné A_n, en déduire qu'il y a exactement deux représentation de dimension 1 de S_n si $n \geq 2$.

Exercice 3. Soit D_4 le groupe diédral du carré.

a. Écriver les éléments de D_4 comme des permutations des sommets du carré.

b. Choisir une base du plan et exprimer les isométries dans la base.

c. Montrer que cette représentation matricielle est irréductible.

d. Calculer le sous-groupe dérivé de D_4. En déduire que $D_4/D_4' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

e. En déduire qu'il y a exactement 4 autres représentations irréductible de D_4, et qu'elles sont toutes de dimension 1.

Exercice 4. Le *groupe des quaternions*, noté Q, est le groupe d'ordre 8 avec les éléments suivants :

$$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

qui vérifient les relations suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \qquad \text{et} \qquad (-1)^2 = 1.$$

a. Montrer que

$$\rho(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \rho(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

se prolonge en une représentation de Q sur $\mathbb{C}$.

b. Montrer que la représentation ρ est irréductible.

c. Calculer le sous-groupe dérivé de Q. En déduire que $Q/Q' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d. En déduire qu'il y a exactement 4 autres représentations irréductible de Q, et qu'elles sont toutes de dimension 1.