# Feuille d'exercices 9 : Caractères

**Exercice 1.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A, B$ deux matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que

*a.* $\operatorname{trace}(A + B) = \operatorname{trace}(A) + \operatorname{trace}(B)$.

*b.* $\operatorname{trace}(\lambda A) = \lambda \operatorname{trace}(A)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

*c.* $\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA)$.

*d.* $\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(PAP^{-1})$ pour tous $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 2.** Soit $X$ une représentation matricielle d'un groupe fini $G$ de caractère $\chi$. On définit une fonction $\det(\chi) : G \to \mathbb{C}$ par $\det(\chi(g)) = \det(X(g))$. Montrer que $\det(\chi)$ est un caractère linéaire de $G$.

**Exercice 3.** Pour deux fonctions $\chi$ et $\psi$ quelconques de $G$ vers $\mathbb{C}$, on définit

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)}.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire complexe sur l'espace des fonctions de $G$ vers $\mathbb{C}$.

**Exercice 4.** Soit $S_n$ le groupe symétrique sur $n$ éléments.

*a.* Si $\sigma \in S_n$ est écrit comme produit de cycles $\sigma = \big(a, b, c, \dots\big)\big(i, j, k, \dots\big) \cdots \big(u, v, w, \dots\big)$, montrer que pour $\alpha \in S_n$ on a

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \Big(\alpha(a), \alpha(b), \alpha(c), \dots\Big)\Big(\alpha(i), \alpha(j), \alpha(k), \dots\Big) \dots \Big(\alpha(u), \alpha(v), \alpha(w), \dots\Big).$$

*b.* Montrer que deux permutations dans $S_n$ sont conjuguées ssi elles ont même type cyclique (c'est-à-dire, même nombre de cycles de chaque longueur).

*c.* En déduire que le nombre de représentations irréductibles de $S_n$ est égal au nombre de partages de $n$. (Rappel : une *partage* d'un entier $n$ est une suite finie $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ d'entiers strictement positifs telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$.)

**Exercice 5.** Soit $\chi$ un caractère irréductible non-trivial de $S_n$.

*a.* Montrer que $\sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) = 0$.

*b.* Montrer que $\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\chi(\sigma) = 0$.

**Exercice 6.** Calculer la table de caractères du groupe symétrique $S_4$.

**Exercice 7.** Calculer la table de caractères de $D_4$, le groupe des isométries du carré.

**Exercice 8.** Calculer la table de caractères de $Q$, le *groupe des quaternions*.