Devoir 1

à remettre le 21 février 2013

Exercice 1. Soient R un anneau commutatif, J un idéal de R, et M un R-module.

a. Montrer que M/JM est un R/J-module si l'on définit :

$$(r+J)\cdot(m+JM) = rm + JM$$

b. Montrer que si $JM = \{0\}$, alors on peut munir M d'une structure de R/J–module.

c. En déduire que si J est un idéal maximal de R tel que $JM = \{0\}$, alors M est un espace vectoriel sur R/J.

d. Soient I un idéal maximal de R et F un R–module libre avec base B. Montrer que F/IF est un espace vectoriel sur R/I et que $\{b + IF : b \in B\}$ est une base de F/IF.

Exercice 2. Soit I l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par 2 et x. Remarquer que $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

a. Montrer que l'application $\beta : I \times I \to \mathbb{Z}[x]/I$ définie par

$$\beta\left(p(x), q(x)\right) = \frac{p(0)}{2}\, q'(0)$$

est $\mathbb{Z}[x]$–bilinéaire.

b. En déduire qu'il existe un $\mathbb{Z}[x]$-morphisme $I \otimes_{\mathbb{Z}[x]} I \to \mathbb{Z}[x]/I$ donné par

$$p(x) \otimes q(x) \mapsto \frac{p(0)}{2}\, q'(0).$$

c. En déduire que $2 \otimes x \neq x \otimes 2$.

d. Montrer que le sous-module engendré par $2 \otimes x - x \otimes 2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[x]/I$.

Exercice 3. Soit $j : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ le $\mathbb{Z}$-morphisme $j(x \bmod 2) = 2x \bmod 4$. Montrer que le morphisme $j \otimes 1 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est nul.

Exercice 4.

Le groupe dérivé *d'un groupe G est le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$:*

$$G' = \left\langle ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G \right\rangle.$$

Il est un sous-groupe normal de G et le groupe quotient G/G' est abélien.

Soient **Grp** la catégorie des groupes et **Ab** la catégorie des groupes abéliens.

a. Montrer que la correspondance

$$\begin{array}{ccc} G & \longmapsto & G/G' \\ \left(G \xrightarrow{\varphi} H\right) & \longmapsto & \left(G/G' \xrightarrow{\overline{\varphi}} H/H'\right) \end{array}$$

où $\overline{\varphi}(gG') = \varphi(g)H'$ pour tout $g \in G$, définit un foncteur $Ab : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$. (En fait, Ab prend valeurs dans **Ab**.)

b. Montrer que les projections canoniques $G \xrightarrow{\pi_G} G/G'$ définissent une transformation naturelle du foncteur identité $Id : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ vers $Ab : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$.

Exercice 5. Soient $\mathscr{C}$ un catégorie et $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Montrer que si A et B sont isomorphe, alors il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, -)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, -)$.