Devoir 2

à remettre le 14 mars 2013

Exercice 1. [*Transformations naturelles sont « homotopies » entre foncteurs.*]

Soient $\mathbf{I}$ la catégorie définie comme suit.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Obj}(\mathbf{I}) & = & \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(\mathbb{0}, \mathbb{0}) & = & \{1_{\mathbb{0}}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) & = & \{1_{\mathbb{1}}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(\mathbb{0}, \mathbb{1}) & = & \{\alpha\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(\mathbb{1}, \mathbb{0}) & = & \{\} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{0} \arrow[loop left, "1_{\mathbb{0}}"] \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{1} \arrow[loop right, "1_{\mathbb{1}}"] \end{tikzcd}$$

Soient $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ deux foncteurs. Montrer qu'une transformation naturelle $\tau : F \to G$ est la même chose qu'un foncteur[1] $H : \mathscr{C} \times \mathbf{I} \to \mathscr{D}$ tel que $H(-, \mathbb{0}) = F(-)$ et $H(-, \mathbb{1}) = G(-)$.

Exercice 2. Soit $B' \xrightarrow{i} B$ et $B \xrightarrow{p} B''$ deux morphismes de R-modules à gauche. Si, pour tout R-module à gauche M,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(B'', M) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(B', M) \to 0$$

est une suite exacte, alors

$$0 \to B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \to 0$$

est une suite exacte scindée de R-modules.

Exercice 3. Soit un diagramme commutatif de ${}_R\mathrm{Mod}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où φ_1, φ_2 et φ_3 sont isomorphismes. Montrer que la ligne du bas est exacte ssi la ligne du haut est exacte.

Exercice 4.

a. Soient $P \xrightarrow{g} N$ et $M \xrightarrow{f} N$ deux morphisme dans ${}_R\mathrm{Mod}$ où P est projectif. Montrer qu'il existe $P \xrightarrow{h} M$ dans ${}_R\mathrm{Mod}$ tel que $f \circ h = g$ ssi $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{im}(f)$.

b. Énoncer et prouver le dual de la partie précédente.

c. Soit un diagramme commutatif de ${}_R\mathrm{Mod}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha_2"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ B_3 \arrow[r, "\beta_2"] & B_2 \arrow[r, "\beta_1"] & B_1 \end{tikzcd}$$

avec P projectif, $\alpha_1 \circ \alpha_2 = 0$, et la ligne du bas exacte en B_2. Trouver un morphisme $P \xrightarrow{\varphi_3} B_3$ qui rende le diagramme commutatif.

Exercice 5. Soient B et C deux R-modules à gauche. On définit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(B,R) \otimes_R C & \xrightarrow{\nu_B} & \mathrm{Hom}_R(B,C) \\ f \otimes c & \longmapsto & \widehat{f} \end{array}$$

où $\widehat{f} : B \to C$ est le R-morphisme donné par $\widehat{f}(b) = f(b)c$ pour tout $b \in B$ et tout $c \in C$.

a. Montrer que $\nu = (\nu_B)_{B \in \mathrm{Obj}({}_R\mathrm{Mod})}$ est une transformation naturelle

$$\mathrm{Hom}_R(-,R) \otimes_R C \xrightarrow{\nu} \mathrm{Hom}_R(-,C).$$

b. Montrer que ν_B est un isomorphisme si B est un R-module libre de type fini.

c. Si B est un R-module de présentation finie[2] et si C est un R-module plat, montrer que ν_B est un isomorphisme.

Notes

[1] Le *produit cartésien* $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ de deux catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est la catégorie où

- $\mathrm{Obj}(\mathscr{C} \times \mathscr{D}) = \mathrm{Obj}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ (les objets sont les paires (A,B), où $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ et $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$) ;
- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}((A,B),(A',B')) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A') \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B,B') = \left\{(f,g) : A \xrightarrow{f} A' ; B \xrightarrow{g} B'\right\}$;
- la composition est donné par $(f,g) \circ (f',g') = (f \circ f', g \circ g')$.

[2] Une *présentation libre* d'un module B est une suite exacte $L_1 \to L_0 \to B \to 0$ avec L_0 et L_1 libres. Si L_0 et L_1 sont de type fini, on dit que B est de *présentation finie*.