

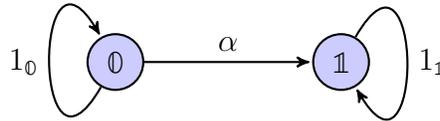
Devoir 2

à remettre le 14 mars 2013

Exercice 1. [*Transformations naturelles sont « homotopies » entre foncteurs.*]

Soient \mathbf{I} la catégorie définie comme suit.

$$\begin{aligned} \text{Obj}(\mathbf{I}) &= \{0, 1\} \\ \text{Hom}_{\mathbf{I}}(0, 0) &= \{1_0\} \\ \text{Hom}_{\mathbf{I}}(1, 1) &= \{1_1\} \\ \text{Hom}_{\mathbf{I}}(0, 1) &= \{\alpha\} \\ \text{Hom}_{\mathbf{I}}(1, 0) &= \{\} \end{aligned}$$



Soient $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs. Montrer qu'une transformation naturelle $\tau : F \rightarrow G$ est la même chose qu'un foncteur¹ $H : \mathcal{C} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $H(-, 0) = F(-)$ et $H(-, 1) = G(-)$.

Exercice 2. Soit $B' \xrightarrow{i} B$ et $B \xrightarrow{p} B''$ deux morphismes de R -modules à gauche. Si, pour tout R -module à gauche M ,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(B'', M) \xrightarrow{p^*} \text{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_R(B', M) \rightarrow 0$$

est une suite exacte, alors

$$0 \rightarrow B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte scindée de R -modules.

Exercice 3. Soit un diagramme commutatif de $_R \text{Mod}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où φ_1, φ_2 et φ_3 sont isomorphismes. Montrer que la ligne du bas est exacte ssi la ligne du haut est exacte.

Exercice 4.

- a. Soient $P \xrightarrow{g} N$ et $M \xrightarrow{f} N$ deux morphismes dans ${}_R \text{Mod}$ où P est projectif. Montrer qu'il existe $P \xrightarrow{h} M$ dans ${}_R \text{Mod}$ tel que $f \circ h = g$ ssi $\text{im}(g) \subseteq \text{im}(f)$.
- b. Énoncer et prouver le dual de la partie précédente.
- c. Soit un diagramme commutatif de ${}_R \text{Mod}$

$$\begin{array}{ccccc}
 P & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_1 \\
 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_1 \\
 B_3 & \xrightarrow{\beta_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_1} & B_1
 \end{array}$$

avec P projectif, $\alpha_1 \circ \alpha_2 = 0$, et la ligne du bas exacte en B_2 . Trouver un morphisme $P \xrightarrow{\varphi_3} B_3$ qui rende le diagramme commutatif.

Exercice 5. Soient B et C deux R -modules à gauche. On définit

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_R(B, R) \otimes_R C & \xrightarrow{\nu_B} & \text{Hom}_R(B, C) \\
 f \otimes c & \mapsto & \widehat{f}
 \end{array}$$

où $\widehat{f} : B \rightarrow C$ est le R -morphisme donné par $\widehat{f}(b) = f(b)c$ pour tout $b \in B$ et tout $c \in C$.

- a. Montrer que $\nu = (\nu_B)_{B \in \text{Obj}({}_R \text{Mod})}$ est une transformation naturelle

$$\text{Hom}_R(-, R) \otimes_R C \xrightarrow{\nu} \text{Hom}_R(-, C).$$

- b. Montrer que ν_B est un isomorphisme si B est un R -module libre de type fini.
- c. Si B est un R -module de présentation finie² et si C est un R -module plat, montrer que ν_B est un isomorphisme.

Notes

¹ Le *produit cartésien* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ de deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est la catégorie où

– $\text{Obj}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{D})$ (les objets sont les paires (A, B) , où $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ et $B \in \text{Obj}(\mathcal{D})$);

– $\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((A, B), (A', B')) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A') \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, B') = \left\{ (f, g) : A \xrightarrow{f} A'; B \xrightarrow{g} B' \right\}$;

– la composition est donnée par $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$.

² Une *présentation libre* d'un module B est une suite exacte $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow B \rightarrow 0$ avec L_0 et L_1 libres. Si L_0 et L_1 sont de type fini, on dit que B est de *présentation finie*.