Devoir 3

à remettre le 28 mars 2013

Exercice 1. Soit A et B deux objets d'une catégorie additive $\mathscr{C}$.

a. Soit $(A \sqcup B, \alpha, \beta)$ un coproduit de A et B. Montrer que α et β sont monomorphismes.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \sqcup B \arrow[rr, dashed, "\Theta"] & & X \\
& B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

b. Énoncer (sans démonstration) le dual de la partie précédente.

c. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories additives. Si $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est un foncteur additif, alors

$$T(A \sqcup B) \cong T(A) \sqcup T(B).$$

(Donner une démonstration détaillée justifiée par les axiomes trouver dans la définition d'une catégorie additive.)

Exercice 2.

a. Soit (D, α, β) un produit fibré des R–morphismes f et g.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\Theta"] \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\
& D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "g"] \\
& B \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

Montrer que si f est un monomorphisme, alors α est un monomorphisme, et que si f est un épimorphisme, alors α est un épimorphisme.

b. Énoncer (sans démonstration) le dual de la partie précédente.

c. Soit un diagramme commutatif de ${}_R\,\mathrm{Mod}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[d, "1_E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\alpha"] & D \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Montrer que (D, α, β) est la somme amalgamée de f et g.

Exercice 3.

a. Montrer que $\mathrm{Hom}_R(P, R) \neq \{0\}$ si P est un R–module projectif non nul.

b. Soit ${}_R P$ un R–module de type fini. Montrer que P est projectif ssi $1_P \in \mathrm{im}(\nu)$, où

$$\nu : \mathrm{Hom}_R(P, R) \otimes_R P \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, P)$$
$$\nu(f \otimes x)(y) = f(y)\, x$$

Exercice 4. Soit

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de R–modules. Montrer que si A et C sont plats, alors B est plat.

Exercice 5. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $R = \mathbb{K}[x_1, x_2]$ l'anneau de polynômes à deux variables à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathbb{K} \cong R/I$ est un R–module, où I est l'idéal engendré par x_1 et x_2.

a. Montrer que la suite suivante est une résolution projective de $\mathbb{K}$ en tant que R–module :

$$0 \xrightarrow{d_3} R \xrightarrow{d_2} R \oplus R \xrightarrow{d_1} R \xrightarrow{d_0} \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0$$

où, pour tous $r, r' \in R$,

$$d_3(r) = 0 \qquad d_2(r) = (rx_2, -rx_1) \qquad d_1((r, r')) = rx_1 + r'x_2 \qquad d_0(r) = r + I.$$

b. Appliquer le foncteur $\mathbb{K} \otimes_R -$ à la résolution projective ci-dessus et calculer les R–modules quotients $\ker(1 \otimes d_n)/\,\mathrm{im}(1 \otimes d_{n+1})$ pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

c. Appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_R(-, \mathbb{K})$ à la résolution projective ci-dessus et calculer les R–modules quotients $\ker(d_{n+1}^*)/\,\mathrm{im}(d_n^*)$ pour $n \in \{0, 1, 2\}$.