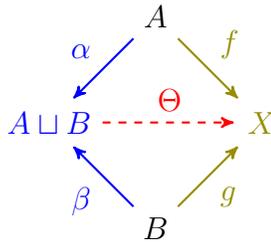


Devoir 3

à remettre le 28 mars 2013

Exercice 1. Soit A et B deux objets d'une catégorie additive \mathcal{C} .

a. Soit $(A \sqcup B, \alpha, \beta)$ un coproduit de A et B . Montrer que α et β sont monomorphismes.



b. Énoncer (sans démonstration) le dual de la partie précédente.

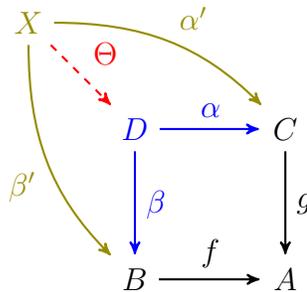
c. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories additives. Si $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur additif, alors

$$T(A \sqcup B) \cong T(A) \sqcup T(B).$$

(Donner une démonstration détaillée justifiée par les axiomes trouver dans la définition d'une catégorie additive.)

Exercice 2.

a. Soit (D, α, β) un produit fibré des R -morphisms f et g .



Montrer que si f est un monomorphisme, alors α est un monomorphisme, et que si f est un épimorphisme, alors α est un épimorphisme.

b. Énoncer (sans démonstration) le dual de la partie précédente.

c. Soit un diagramme commutatif de $R \text{ Mod}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow \beta & & \downarrow 1_E & & \\
 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\alpha} & D & \xrightarrow{\gamma} & E & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Montrer que (D, α, β) est la somme amalgamée de f et g .

Exercice 3.

- a. Montrer que $\text{Hom}_R(P, R) \neq \{0\}$ si P est un R -module projectif non nul.
 b. Soit ${}_R P$ un R -module de type fini. Montrer que P est projectif ssi $1_P \in \text{im}(\nu)$, où

$$\begin{aligned} \nu : \text{Hom}_R(P, R) \otimes_R P &\longrightarrow \text{Hom}_R(P, P) \\ \nu(f \otimes x)(y) &= f(y)x \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de R -modules. Montrer que si A et C sont plats, alors B est plat.

Exercice 5. Soient \mathbb{K} un corps et $R = \mathbb{K}[x_1, x_2]$ l'anneau de polynômes à deux variables à coefficients dans \mathbb{K} . Alors $\mathbb{K} \cong R/I$ est un R -module, où I est l'idéal engendré par x_1 et x_2 .

- a. Montrer que la suite suivante est une résolution projective de \mathbb{K} en tant que R -module :

$$0 \xrightarrow{d_3} R \xrightarrow{d_2} R \oplus R \xrightarrow{d_1} R \xrightarrow{d_0} \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0$$

où, pour tous $r, r' \in R$,

$$d_3(r) = 0 \quad d_2(r) = (rx_2, -rx_1) \quad d_1((r, r')) = rx_1 + r'x_2 \quad d_0(r) = r + I.$$

- b. Appliquer le foncteur $\mathbb{K} \otimes_R -$ à la résolution projective ci-dessus et calculer les R -modules quotients $\ker(1 \otimes d_n) / \text{im}(1 \otimes d_{n+1})$ pour $n \in \{0, 1, 2\}$.
 c. Appliquer le foncteur $\text{Hom}_R(-, \mathbb{K})$ à la résolution projective ci-dessus et calculer les R -modules quotients $\ker(d_{n+1}^*) / \text{im}(d_n^*)$ pour $n \in \{0, 1, 2\}$.