Devoir 4

à remettre le 16 avril 2013

Notation. *On note un complexe par* $\mathbf{A}$ *et ses morphismes par* d_n^A *; par exemple,*

$$\mathbf{A}: \quad \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^A} A_n \xrightarrow{d_n^A} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Un morphisme de complexe est noté $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$.

Exercice 1. Soient $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne et

$$0 \to \mathbf{A} \xrightarrow{i} \mathbf{B} \xrightarrow{p} \mathbf{C} \to 0$$

une suite exacte courte de $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$ tel que $d_n^A = 0$, $d_n^B = 0$, et $d_n^C = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

a. Calculer les morphismes de liaison associés à la suite exacte courte.

b. Calculer la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte courte.

c. Vérifier directement que la suite exacte longue de la partie précédente est exacte.

Exercice 2. Soient A et B deux objets d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$.

a. Montrer que

$$\mathbf{C}: \qquad \cdots \to 0 \to 0 \to A \xrightarrow{\alpha} A \oplus B \xrightarrow{q} B \to 0 \to 0 \to \cdots$$

est un complexe acyclique, où α et q sont donné par la définition de (co)produit. (*Donner une démonstration qui n'utilise pas le théorème de Freyd et Mitchell.*)

b. Montrer que $1_{\mathbf{C}}$ et $0_{\mathbf{C}}$ sont homotopes.

Exercice 3. Soient $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, P un objet projectif de $\mathscr{A}$, et $k \in \mathbb{Z}$. Soit $\Sigma^k(1_P)$ le complexe

$$\Sigma^k(1_P): \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_{k+1}=0} P \xrightarrow{d_k=1_P} P \xrightarrow{d_{k-1}=0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

a. Montrer que $\Sigma^k(1_P)$ est un objet projectif de $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$.

b. Montrer que si $\mathscr{A}$ possède assez d'objets projectifs, alors $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$ possède assez d'objets projectifs.

Exercice 4. Soient $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ un morphisme de complexes de R–modules. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on pose que

$$\mathbf{cône}(f)_n = A_{n-1} \oplus C_n$$

et on définit

$$\begin{aligned} d_n^f = d_n^{\mathbf{cône}(f)} : \mathbf{cône}(f)_n &\longrightarrow \mathbf{cône}(f)_{n-1} \\ (a, c) &\longmapsto \big(-d_{n-1}^A(a),\ d_n^C(c) - f_{n-1}(a)\big) \end{aligned}$$

Si l'on considère les éléments de $A_{n-1} \oplus C_n$ comme des vecteurs $\left[\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right]$, alors d_n^f s'exprime comme

$$d_n^f \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{n-1}^A & 0 \\ -f_{n-1} & d_n^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{n-1}^A(a) \\ -f_{n-1}(a) + d_n^C(c) \end{bmatrix}.$$

a. Montrer que $\mathbf{cône}(f)$ est un complexe (appelé *cône* sur f).

b. Soit $\mathbf{A}[-1]$ le complexe obtenu de $\mathbf{A}$ en augmentant les indices de 1 : pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{A}[-1]_n = A_{n-1} \qquad \text{et} \qquad d_n^{A[-1]} = -d_{n-1}^A.$$

Montrer qu'il existe une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{u} \mathbf{cône}(f) \xrightarrow{v} \mathbf{A}[-1] \longrightarrow 0$$

où $u_n(c) = (0, c)$ pour tout $c \in C_n$ et $v_n(a, c) = -a$ pour tout $(a, c) \in \mathbf{cône}(f)$.

c. Montrer que le morphisme de liaison

$$\partial_n : H_n(\mathbf{A}[-1]) \to H_{n-1}(\mathbf{C})$$

est égal à $H_{n-1}(f)$, le morphisme induit de f.

d. Montrer que $\mathbf{cône}(f)$ est acyclique ssi $H_n(f)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En déduire que $\mathbf{cône}(1_\mathbf{C})$ est acyclique.

e. Soit $\mathbf{C}$ un complexe de ${}_R\mathrm{Mod}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a que C_n est projectif et $d_n^C = 0$. Montrer que $\mathbf{cône}(1_\mathbf{C})$ est un objet projectif de $\mathbf{Comp}({}_R\mathrm{Mod})$.

Remarque : La réciproque est aussi vraie ; tout objet projectif de $\mathbf{Comp}({}_R\mathrm{Mod})$ *est isomorphe à* $\mathbf{cône}(1_\mathbf{C})$, *où* C_n *est projectif et* $d_n^C = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.