Devoir 5

à remettre le 2 mai 2013

Exercice 1. Soit G un groupe abélien de torsion. Montrer que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Exercice 2. Soit $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$ une suite exacte courte de R–modules.

a. Montrer qu'un morphisme $g : M' \to N$ se prolonge à un morphisme $\tilde{g} : M \to N$ ssi l'image de g par le morphisme de liaison $\partial : \mathrm{Hom}_R(M', N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M'', N)$ est nulle.

b. Montrer qu'un morphisme $h : N \to M''$ se relève en un morphisme $\widehat{h} : N \to M$ ssi l'image de h par le morphisme de liaison $\partial : \mathrm{Hom}_R(N, M'') \to \mathrm{Ext}^1_R(N, M')$ est nulle.

c. En déduire qu'un R–module à gauche B est injectif ssi $\mathrm{Ext}^1_R(R/I, B) = \{0\}$ pour tout idéal à gauche I de R.

Exercice 3. Soient R et S deux anneaux, A_R un R–module à droite, ${}_RB_S$ un (R,S)–bimodule et ${}_SC$ un S–module à gauche. Montrer que si ${}_RB$ est plat et si B_S est plat, alors

$$\mathrm{Tor}^S_n(A \otimes_R B, C) \cong \mathrm{Tor}^R_n(A, B \otimes_S C).$$

(Indication : montrer que le produit tensoriel de deux modules plats est un module plat.)

Exercice 4. Soit T un foncteur exact à droite. Montrer que s'il existe $n > 0$ tel que L_nT est exact à droite, alors L_mT est le foncteur nul pour tout $m \geq n$.

Exercice 5. Soit G un groupe abélien.

a. Montrer que le foncteur (covariant) $E = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, -)$ est exact à droite.

b. Calculer les foncteurs dérivés à gauche L_nE de E.

c. Montrer que le foncteur contravariant $F = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-, G)$ est exact à droite.

d. Calculer les foncteurs dérivés à gauche L_nF de F.