Feuille d'exercices 1

Soit R un anneau associatif et unitaire.

Exercice 1. Soit M un R–module à gauche.

a. Montrer que $0_R \cdot m = 0_M$ pour tout $m \in M$.

b. Montrer que $r \cdot 0_M = 0_M$ pour tout $r \in R$.

c. Montrer que $(-1_R) \cdot m = -m$ pour tout $m \in M$.

Exercice 2. Soit M un R–module à droite. Soient $a \in R$ et $m \in M$ non-nul tels que $m \cdot a = 0_M$. Montrer que a ne possède pas un inverse à droite (c'est-à dire, il n'existe pas de $b \in R$ tel que $ab = 1_R$).

Exercice 3. Soient R et S deux anneaux et $\phi : S \to R$ un morphisme d'anneaux. Si M est un R–module à gauche, montrer que M est aussi un S–module à gauche si l'on définit

$$s \cdot m = \phi(s) \cdot m$$

pour tout $s \in S$ et pour tout $m \in M$.

Exercice 4. Soient N, N' deux sous-modules d'un R–module M.

a. Montrer que $N \cap N'$ est un sous-module de M.

b. Montrer que $N + N' = \{n + n' : n \in N, n' \in N'\}$ est un sous-module de M.

Exercice 5. Soit $f : M \to M'$ un morphisme de R–modules à gauche.

a. Montrer que $\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$ est un sous-module de M.

b. Montrer que $\mathrm{im}(f) = \{f(m) \mid m \in M\}$ est un sous-module de M'.

c. Soit U' un sous-module de M'. Montrer que $f^{-1}(U')$ est un sous-module de M.

Exercice 6. ($\mathbb{R}[x]$–*modules.*) Soit $V = \mathbb{R}^2$. Rappler que V devient un $\mathbb{R}[x]$–module si l'on se donne une application linéaire $T : V \to V$.

a. Soit $T_1 : V \to V$ la rotation par $\pi/2$ dans le sens horaire autour de l'origine. Montrer que V et $\{0\}$ sont les seuls $\mathbb{R}[x]$–sous-modules de V.

b. Soit $T_2 : V \to V$ la projection sur la droite $x = 0$. Montrer que V, $\{0\}$, la droite $x = 0$ et la droite $y = 0$ sont les seuls $\mathbb{R}[x]$–sous-module de V.

c. Soit $T_3 : V \to V$ la rotation par π dans le sens horaire autour de l'origine. Montrer que tout sous-espace de V est $\mathbb{R}[x]$–sous-module de V.

Exercice 7. Soient $f : M \to N$ un morphisme de R–modules à gauche et K un sous-module de M tel que $K \subseteq \ker(f)$. Montrer que la correspondance

$$\begin{aligned} \widehat{f} : M/K &\longrightarrow N \\ m + K &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

est un morphisme de R–modules. *(Il faut aussi montrer que $\widehat{f}$ est bien défini.)*

Exercice 8. Soit M un R–module à droite. Montrer que M est simple ssi pour tout $m \in M$ non-nul, on a que $M = \{m \cdot a : a \in R\}$.

Exercice 9. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, où $d = (n, m)$.

Exercice 10. Soit R un anneau commutatif.

a. Montrer que l'application de $\psi : \mathrm{Hom}_R(R, M) \to M$ définie par $\psi(f) = f(1_R)$ est une isomorphismes de R-modules à gauche.

b. Montrer que l'application $\varphi : R \to \mathrm{End}_R(M)$ définie par $\varphi(r) = r\,\mathrm{Id}_M$, où Id_M est l'endomorphisme identité, est un morphisme d'anneaux.

c. En déduire que les R-algèbres $\mathrm{End}_R(R) = \mathrm{Hom}_R(R, R)$ et R sont isomorphes.

Exercice 11. Soient R un anneau commutatif, J un idéal de R, M un R-module et

a. Soit JM l'ensemble des combinaison linéaires finies de la forme $\sum_i j_i\, m_i$, où $j_i \in J$ et $m_i \in M$:

$$JM = \left\{ \sum_{\text{fini}} j_i\, m_i : j_i \in J, m_i \in M \right\}.$$

Montrer que JM est un sous-module de M.

b. Montrer que M/JM est un R/J-module si l'on définit :

$$(r + J) \cdot (m + JM) = rm + JM$$

c. Montrer que si $JM = \{0\}$, alors on peut munir M d'une structure de R/J–module.

d. En déduire que si J est un idéal maximal de R tel que $JM = \{0\}$, alors M est un espace vectoriel sur R/J.

e. Soient I un idéal maximal de R et F un R–module libre avec base B. Montrer que F/IF est un espace vectoriel sur R/I et que $\{b + IF : b \in B\}$ est une base de F/IF.

Exercice 12. Soient M un R–module à droite et $X \subseteq M$ un sous-ensemble quelconque. On définit l'*annulateur* $\mathrm{Ann}_R(X)$ de X dans R comme étant l'ensemble

$$\mathrm{Ann}_R(X) = \{a \in R : x \cdot a = 0 \text{ pour tout } x \in X\}.$$

a. Montrer que $\mathrm{Ann}_R(X)$ est un idéal à droite de R.

b. Montrer que si X est un sous-module de M alors $\mathrm{Ann}_R(X)$ est un idéal bilatère de R.

c. Montrer que M admet une structure naturelle de $R/\mathrm{Ann}_R(M)$–module (à droite).

d. Un module M est dit *fidèle* si $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$. Montrer que tout R–module M est fidèle en tant que $R/\mathrm{Ann}_R(M)$–module.

Exercice 13.

Pour un idéal I d'un anneau R et un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit I^n comme l'ensemble des combinaison linéaire finie des éléments de la forme $i_1 \cdots i_n$, où $i_1, \ldots, i_n \in I$.

Soit R un anneau commutatif. Soit I un idéal de R tel que $I^n = \{0\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : M \to N$ un R-morphisme. Montrer que si l'application $\bar{\varphi} : M/IM \to N/IN$ définie par $\bar{\varphi}(m + IM) = \varphi(m) + IN$ est sujective, alors φ est surjective.