Feuille d'exercices 2

Soit R un anneau associatif et unitaire.

Exercice 1. Montrer que tout R-module est isomorphe à un quotient d'un R-module libre.

Exercice 2. Soit N un sous-module d'un R–module M. Montrer que si M/N et N sont de type fini, alors M est de type fini.

Exercice 3. Soit M un groupe abélien qui est à la fois un R-module à gauche et un R-module à droite tel que $rm = mr$ pour tout $r \in R$ et $m \in M$. Montrer que $(r_1 r_2)m = m(r_2 r_1)$ pour tout $m \in M$ et tous $r_1, r_2 \in R$.

Exercice 4. (*Propriété universelle de* $\ker(f)$) Soit $f : M \to N$ un morphisme de R–modules. On montrera que le noyau K de f est uniquement déterminé par la propriété suivante :

(i) il existe un morphisme de R–modules $\ell : K \to M$ tel que $f \circ \ell = 0$; et

(ii) si $\ell' : K' \to M$ est un morphisme de R–modules tel que $f \circ \ell' = 0$, alors il existe un unique morphisme de R–modules $u : K' \to K$ tel que $\ell' = \ell \circ u$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\ell"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ K' \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "\ell'"'] & & \end{tikzcd}$$

Explicitement :

a. Montrer que le noyau de f vérifie les conditions (i) et (ii).

b. Montrer que si K est un R–module qui vérifie (i) et (ii), alors $K \cong \ker(f)$.

Exercice 5. Soient R un anneau intègre et Q son corps des fractions. Si A est un R–module, montrer que tout élément de $Q \otimes_R A$ est de la forme $q \otimes a$, où $q \in Q$ et $a \in A$.

Exercice 6. Montrer que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

Exercice 7. Montrer que $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{C}$.

Exercice 8.

a. Montrer que le tenseur élémentaire $2 \otimes 1 \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est nul.

b. Montrer que le tenseur élémentaire $2 \otimes 1 \in 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est non-nul.

Exercice 9. Soient I un idéal bilatère de R et M un R–module à gauche.

a. Montrer que la correspondance $(r+I, m) \mapsto rm + IM$ est une application R-biadditive de $R/I \times M$ vers M/IM.

b. Montrer qu'il existe un isomorphisme de R–modules $(R/I) \otimes_R M \cong M/IM$.

Exercice 10.

a. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A/nA$ pour tout groupe abélien A.

b. En déduire que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, où d est le pgcd des entiers n et m.

Exercice 11. Soit I l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par 2 et x. Remarquer que $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

a. Montrer que l'application $\beta : I \times I \to \mathbb{Z}[x]/I$ définie par

$$\beta\left(p(x), q(x)\right) = \frac{p(0)}{2}\, q'(0)$$

est $\mathbb{Z}[x]$–bilinéaire.

b. En déduire qu'il existe un $\mathbb{Z}[x]$-morphisme $I \otimes_{\mathbb{Z}[x]} I \to \mathbb{Z}[x]/I$ donné par

$$p(x) \otimes q(x) \mapsto \frac{p(0)}{2}\, q'(0).$$

c. En déduire que $2 \otimes x \neq x \otimes 2$.

d. Montrer que le sous-module engendré par $2 \otimes x - x \otimes 2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[x]/I$.

Exercice 12. Soient R un anneau *commutatif* et A et B deux R–modules.

a. Montrer que $A \otimes_R B$ est un R–module.

b. Montrer que l'application $A \times B \to A \otimes_R B$ définie par $(a, b) \mapsto a \otimes b$ est R-bilinéaire.

c. Montrer que pour tout R–module M et pour toute application R-bilinéaire $g : A \times B \to M$, il existe un unique R-morphisme $\tilde{g} : A \otimes_R B \to M$ tel que $\tilde{g}(a \otimes b) = g(a, b)$.

Exercice 13. Soit R un anneau. Soit M_R un R-module quelconque et ${}_RN$ un R-module libre avec base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

a. Montrer que tout élément de $M \otimes_R N$ s'exprime de façon unique sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes e_i, \text{ où } m_i \in M.$$

b. En déduire que si $\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes e_i = 0$, alors $m_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 14. Soit R et S deux anneaux. Montrer les énoncés suivants.

a. Pour ${}_RA_S$ et ${}_RB$, $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ est un S-module à gauche par $sf : a \mapsto f(as)$.

b. Pour ${}_RA_S$ et B_S, $\mathrm{Hom}_S(A, B)$ est un R-module à droite par $fr : a \mapsto f(ra)$.

c. Pour ${}_SB_R$ et A_R, $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ et un S-module à gauche par $sf : a \mapsto s\left(f(a)\right)$.

d. Pour ${}_SB_R$ et ${}_SA$, $\mathrm{Hom}_S(A, B)$ est un R-module à gauche par $fr : a \mapsto f(a)r$.