Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Soit $f : M \to N$ un morphisme de R–modules à gauche. Montrer les énoncés suivants.

a. f est un monomorphisme ssi $0 \to M \xrightarrow{f} N$ est une suite exacte.

b. f est un épimorphisme ssi $M \xrightarrow{f} N \to 0$ est une suite exacte.

c. f est un isomorphisme ssi $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ est une suite exacte.

d. La suite $0 \to \ker(f) \xrightarrow{\text{incl}} M \xrightarrow{f} N$, où incl est l'inclusion canonique, est exacte.

e. La suite $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\text{proj}} \operatorname{coker}(f) \to 0$, où proj est la projection canonique, est exacte.

f. La suite $0 \to \ker(f) \xrightarrow{\text{incl}} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\text{proj}} \operatorname{coker}(f) \to 0$ est exacte.

Exercice 2. Soit $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ une suite exacte. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

a. f est une *section* : c'est-à-dire, il existe un morphisme $Y \xrightarrow{h} X$ tel que $h \circ f = 1_X$.

b. g est une *rétraction* : c'est-à-dire, il existe un morphisme $Z \xrightarrow{h} Y$ tel que $g \circ h = 1_Z$.

c. la suite est *scindée* : c'est-à-dire, il existe un morphisme $Y \xrightarrow{h} X \oplus Z$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\text{incl}_1"] & X \oplus Z \arrow[r, "\text{proj}_2"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\text{incl}_1(x) = (x, 0)$ et $\text{proj}_2(x, z) = z$.

Exercice 3. Soit P un R–module à gauche. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

a. P est projectif.

b. P est facteur direct d'un R–module libre.

c. Toute suite exacte de la forme $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ est scindée.

d. $\operatorname{Hom}_R(P, -)$ est un foncteur exact.

Exercice 4. Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de R–modules et R–monomorphismes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[d, "\varphi_3"] \\ 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \end{tikzcd}$$

a. Montrer qu'il existe un unique R–morphisme $\varphi_1 : A_1 \to B_1$ rendant le diagramme (avec φ_1) commutatif.

b. Montrer que φ_1 est un isomorphisme ssi φ_2 et φ_3 sont isomorphismes.

Exercice 5. Montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un *cogénérateur injectif* de ${}_{\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$; c'est-à-dire, montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$–module injectif et que, pour tout $\mathbb{Z}$–module M, on a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$.