# Feuille d'exercices 4

**Exercice 1.** Soient $A = \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ et $B = \mathrm{Mat}_{m\times m}(R)$, où $R$ est un anneau commutatif. Montrer que la $R$-algèbre $A \otimes_R B$ est isomorphisme à la $R$-algèbre $\mathrm{Mat}_{nm\times nm}(R)$.

**Exercice 2.** Soit $R$ un *anneau intègre* (c'est-à-dire, $R$ est commutatif, $R$ est unitaire, et si $a, b \in R$ sont non nuls, alors $ab$ est non nul). Pour un $R$–module à gauche $M$, on définit

$$\mathrm{Tor}(M) = \{m \in M \ : \text{ il existe } a \in R \ \underline{\text{non-nul}} \text{ tel que } a \cdot m = 0\}.$$

*a.* Montrer que $\mathrm{Tor}(M)$ est un sous-module de $M$.

*b.* Soit $\varphi : M \to N$ un morphisme de $R$–modules. Montrer que $\varphi(\mathrm{Tor}(M)) \subseteq \mathrm{Tor}(N)$.

*c.* Soit $Q$ le corps des fractions de $R$. Montrer qu'il existe un isomorphisme de $R$-modules $Q \otimes_R M \cong Q \otimes_R (M/\operatorname{Tor}(M))$.

**Exercice 3.**

*a.* Soit $R$ un anneau intègre. Montrer que si $R$ est un $R$–module injectif, alors $R$ est un corps.

*b.* Montrer que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est à la fois injectif et projectif en tant que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$–module.

**Exercice 4.** Soit ${}_RB_S$ un $(R, S)$–bimodule qui est un $R$–module plat, et $C_S$ un $S$–module injectif. Montrer que $\mathrm{Hom}_S(B, C)$ est un $R$–module à gauche injectif.

**Exercice 5.** Montrer que si

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

sont deux suites exactes courtes avec $P_1$ et $P_2$ projectifs, alors $M_1 \oplus P_2 \cong M_2 \oplus P_1$.

**Exercice 6.** Soient $F : {}_R\mathrm{Mod} \to {}_S\mathrm{Mod}$ et $G : {}_S\mathrm{Mod} \to {}_R\mathrm{Mod}$ deux foncteurs tels que $(F, G)$ est une paire de foncteurs adjointe. Montrer que si $G$ est exact, alors $F$ préserve les modules projectifs. Montrer que si $F$ est exact, alors $G$ préserve les modules injectifs.

**Exercice 7.** Montrer que si $P$ est un $R$–module à droite projectif, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un $R$–module à gauche injectif.

**Exercice 8.** Montrer que $P$ est projectif ssi pour tout épimorphisme $f : I \to I''$ avec $I$ injectif et tout morphisme $u : P \to I''$ il existe $v : P \to I$ tel que $f \circ v = u$.

**Exercice 9.** Montrer qu'un $R$–module injectif $I$ est un cogénérateur injectif de ${}_R\mathrm{Mod}$ ssi le foncteur $\mathrm{Hom}_R(-, I)$ est fidèle.

**Exercice 10.** Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $R$–modules à gauche. Montrer que $f$ est injectif ssi le morphisme $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est surjectif.

**Exercice 11.** Soit $f$ une application dans **Ens**. Montrer que $f$ est un épimorphisme ssi $f$ est surjective. Montrer que $f$ est un monomorphisme ssi $f$ est injective. Même pour la catégorie ${}_R\mathrm{Mod}$.

**Exercice 12.**

*a.* Montrer que les objets initials, terminals ou nuls sont unique à isomorphisme près.

*b.* Montrer que $\{0\}$ est un objet nul dans ${}_R\mathrm{Mod}$ et que $\{1\}$ est un objet nul dans **Grp**.

*c.* Montrer que ni **Ens** ni **Top** admet des objet nuls.

*d.* Montrer que $(\{a\}, a)$ est un objet nul dans $\mathbf{Ens}_*$, la catégorie d'ensembles pointés.

*e.* Montrer que $(\{a\}, a)$ est un objet nul dans $\mathbf{Top}_*$, la catégorie d'espaces topologiques pointés.

**Exercice 13.** Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additif qui admet un objet nul $\mathbb{0}$. Montrer que l'unique morphisme $A \to \mathbb{0}$ et l'unique morphisme $\mathbb{0} \to A$ sont les éléments neutres des groupes abéliens $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, \mathbb{0})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{0}, A)$.

**Exercice 14.** Soit $\mathscr{C}$ une catégorie qui admet un objet nul $\mathbb{0}$. Montrer que tout noyau est monomorphismes et tout conoyau est épimorphisme.

**Exercice 15.**

*a.* Montrer que tout isomorphisme $f$ d'une catégorie additive est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

*b.* Montrer que tout morphisme $f$ d'une catégorie abélien est un isomorphisme ssi $f$ est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

**Exercice 16.** Soient $X \xrightarrow{g} Y$ et $Y \xrightarrow{f} Z$ deux morphisme d'une catégorie $\mathscr{C}$.

*a.* Si $f \circ g$ est un monomorphisme, alors $g$ est un monomorphisme.

*b.* Si $f$ et $g$ sont des monomorphismes, alors $f \circ g$ est un monomorphisme.

*c.* Si $f \circ g$ est un épimorphisme, alors $f$ est un épimorphisme.

*d.* Si $f$ et $g$ sont des épimorphisme, alors $f \circ g$ est un épimorphisme.

*e.* Si $f$ est un isomorphe, alors $f$ est un monomorphisme et un épimorphisme.

**Exercice 17.** Soit $u$ un morphisme d'une catégorie $\mathscr{C}$.

*a.* Si $\ker(u)$ existe, alors $u$ est un monomorphisme ssi $\ker(u) = 0$.

*b.* Si $\mathrm{coker}(u)$ existe, alors $u$ est un épimorphisme ssi $\mathrm{coker}(u) = 0$.

**Exercice 18.** Soient $B$ et $C$ deux sous-ensemble de $A$.

*a.* Montrer que le produit fibré de $B \xrightarrow{\mathrm{incl}_B} A$ et $C \xrightarrow{\mathrm{incl}_C} A$ dans **Ens** est $B \cap C$.

*b.* Montrer que la somme amalgamée de $B \cap C \xrightarrow{\mathrm{incl}} B$ et $B \cap C \xrightarrow{\mathrm{incl}} C$ est $B \cup C$.

**Exercice 19.** Soient $B$ et $C$ deux sous-modules d'une $R$–module $A$.

*a.* Montrer que le produit fibré de $B \xrightarrow{\mathrm{incl}_B} A$ et $C \xrightarrow{\mathrm{incl}_C} A$ dans ${}_R\mathrm{Mod}$ est $B \cap C$.

*b.* Montrer que la somme amalgamée de $B \cap C \xrightarrow{\mathrm{incl}} B$ et $B \cap C \xrightarrow{\mathrm{incl}} C$ est $B + C$.