Feuille d'exercices 5

Notation. *On note un complexe par* $\mathbf{A}$ *et ses morphismes par* d_n^A *; par exemple,*

$$\mathbf{A}: \quad \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^A} A_{n-1} \xrightarrow{d_n^A} A_n \longrightarrow \cdots$$

Un morphisme de complexe est noté $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$.

Exercice 1. Montrer que P est projectif ssi pour tout épimorphisme $f : I \to J$ avec I injectif et tout morphisme $u : P \to J$ il existe $\Theta : P \to I$ tel que $f \circ \Theta = u$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "u"] \arrow[dl, dashed, red, "\Theta"'] & \\
I \arrow[r, "f"'] & J \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Exercice 2. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux catégories abéliennes.

a. Soient $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un foncteur additif, et $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ deux morphismes de $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$. Montrer que si f et g sont homotopes, alors $F(f)$ et $F(g)$ sont homotopes.

b. Soient $g : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et $f : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ deux morphismes de $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$. Montrer que si $f \simeq 0$ *ou* si $g \simeq 0$, alors $f \circ g \simeq 0$.

Exercice 3. Montrer que la suite de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$–modules

$$\cdots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \cdots$$

est une suite exacte qui consiste d'objets projectifs de ${}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$, mais qui n'est pas un objet projectif de $\mathbf{Comp}({}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}\mathrm{Mod})$.

Exercice 4.

a. Montrer que chaque sous-groupe fini de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est la limite inductive de ces sous-groupes finis : $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \varinjlim \{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. Soient α, φ et ψ des morphismes d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$:

$$A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\varphi} C$$

a. Si φ est un monomorphisme, alors $\ker(\varphi \circ \alpha) = \ker(\alpha)$.

b. Si ψ est un épimorphisme, alors $\operatorname{coker}(\alpha \circ \psi) = \operatorname{coker}(\alpha)$.

Exercice 6. Montrer que $\mathscr{A} \to K(\mathscr{A})$ est un foncteur.

Exercice 7. Soit $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ une suite exacte de R–modules à gauche.

a. Montrer que si A et C sont de type fini, alors C est de type fini. Plus précisément, montrer que si A est engendré par m éléments et C est engendré par n éléments, alors B est engendré par $m+n$ éléments.

b. Montrer que si A et C sont de présentation finie, alors B est de présentation finie.

Exercice 8. Soient R un anneau intègre et $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ une suite exacte courte de R–modules. Montrer que si A et C sont des modules de torsion, alors B est de torsion.

Exercice 9. Soit un diagramme commutatif dans une catégorie abélienne $\mathscr{A}$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

a. Montrer que la composition de $P \to A \oplus B$ et $A \oplus B \to S$ est 0 ssi le carré commute.

b. Montrer que la suite $0 \to P \to A \oplus B \to S$ est exacte ssi (P, α, β) est un produit fibré de f et g.

c. Montrer que la suite $P \to A \oplus B \to S \to 0$ est exacte ssi (S, f, g) est une somme amalgamée de α et β.

d. Soit (P, α, β) un produit fibré de f et g. Montrer que $\ker(f) = \beta \circ \ker(\alpha)$. *(Vérifier que $\beta \circ \ker(\alpha)$ est un noyau de f.)* En déduire que f est un monomorphisme ssi α est un monomorphisme.

e. Soit (S, f, g) une somme amalgamée de α et β. Montrer que si α est un monomorphisme, alors (P, α, β) est un produit fibré de f et g. En déduire que si α est un monomorphisme, alors f est un monomorphisme.

f. Soit (P, α, β) un produit fibré de f et g. Montrer que si f est un épimorphisme, alors α est un épimorphisme.