Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} E$ une suite exacte de R–modules.

a. Montrer que α est surjectif ssi γ est injectif.

b. Montrer que si α et δ sont isomorphisme, alors $C = \{0\}$.

c. Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(\alpha) \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} \ker(\delta) \longrightarrow 0$$

est exacte, où $\varphi(b + \operatorname{im}(\alpha)) = \beta(b)$ et $\psi(c) = \gamma(c)$.

Exercice 2. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux R–morphismes. Montrer que l'on a une suite exacte

$$0 \to \ker(f) \to \ker(g \circ f) \to \ker(g) \to \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(g \circ f) \to \operatorname{coker}(g) \to 0$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un morphisme de complexes. Montrer que, si $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Coker}(f)$ sont des complexes exacts, alors $H_n(f)$ est un isomorphisme pour tout n.

Exercice 4. Soient R un anneau et I un idéal nilpotent de R. *(Un idéal I de R est dit* nilpotent *s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n = 0$.)* Montrer que M est un R–module plat ssi M/IM est un R/I–module plat et le morphisme canonique $I \otimes_R M \to M$ est injectif.

Exercice 5. Soit $R \to S$ un morphisme d'anneaux tel que S est un R–module plat. Montrer que $\operatorname{Tor}_n^R(M, N) \otimes_R B \cong \operatorname{Tor}_n^S(M \otimes_R B, N \otimes_R B)$.

Exercice 6. Soient I un idéal a droite et J un idéal a gauche de l'anneau R. Montrer que

$$\operatorname{Tor}_1^R(R/I, R/J) \cong (I \cap J)/IJ.$$

Exercice 7. Soit G un groupe abélien. Montrer que le foncteur $T = \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, -)$ est exact à gauche et calculer ses foncteurs dérivés à droite R_nT.