Devoir 1

à remettre le 21 février 2018

Exercice 1. Soit R un anneau commutatif, J un idéal de R, et M un R-module.

a. Montrer que le R-module M/JM est aussi un R/J-module si l'on définit

$$(r+J)\cdot(m+JM) = rm + JM$$

pour tout $r+J \in R/J$ et pour tout $m+JM \in M/JM$. *(Il faut aussi montrer que la multiplication est bien-définie !)*

b. Montrer que si $JM = \{0\}$, alors on peut munir M d'une structure de R/J-module.

c. En déduire que si J est un idéal maximal de R tel que $JM = \{0\}$, alors M est un espace vectoriel sur R/J.

d. Soit I un idéal maximal de R et L un R-module libre avec base B. Montrer que L/IL est un espace vectoriel sur R/I et que $\{b + IL : b \in B\}$ est une base de L/IL.

e. Soit R un anneau commutatif qui possède un unique idéal maximal I. Peut-on définir un foncteur de la catégorie de R-modules vers la catégorie de R/I-modules ?

Exercice 2. Soit R un anneau, M_R un R-module à droite, et ${}_RN$ un R-module à gauche libre avec base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

a. Montrer que tout élément de $M \otimes_R N$ admet une unique expression de la forme $\sum_{i=1}^n m_i \otimes e_i$ avec $m_i \in M$.

b. En déduire que si $\sum_{i=1}^n m_i \otimes e_i = 0$, alors $m_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 3. Soit I l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par 2 et x. Remarquer que $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

a. Montrer que l'application $\beta : I \times I \to \mathbb{Z}[x]/I$ définie par

$$\beta\left(p(x), q(x)\right) = \frac{p(0)}{2}\, q'(0)$$

est $\mathbb{Z}[x]$–bilinéaire.

b. En déduire qu'il existe un $\mathbb{Z}[x]$-morphisme $I \otimes_{\mathbb{Z}[x]} I \to \mathbb{Z}[x]/I$ donné par

$$p(x) \otimes q(x) \mapsto \frac{p(0)}{2}\, q'(0).$$

c. En déduire que $2 \otimes x \neq x \otimes 2$.

d. Montrer que le sous-module engendré par $2 \otimes x - x \otimes 2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[x]/I$.

Exercice 4. Soit A, B, C des objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ et $A \sqcup B$ le coproduct de A et B. Montrer que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \sqcup B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \sqcap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C).$$

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Montrer que si A et B sont isomorphes, alors il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, -)$.