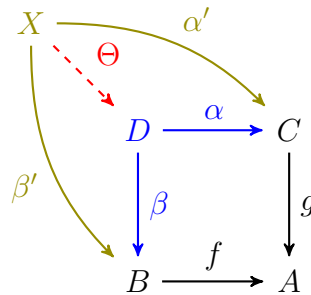


Devoir 2

à remettre le 19 mars 2018

Exercice 1.

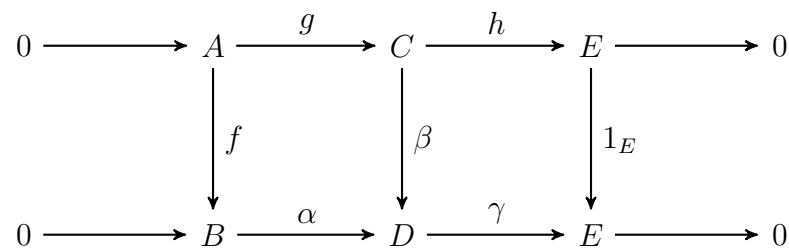
a. Soit (D, α, β) un produit fibré des R -morphisms f et g .



Montrer que si f est un monomorphisme, alors α est un monomorphisme, et que si f est un épimorphisme, alors α est un épimorphisme.

b. Énoncer (sans démonstration) le dual de la partie précédente.

c. Soit un diagramme commutatif de R Mod



où les lignes sont exactes. Montrer que (D, α, β) est la somme amalgamée de f et g .

Exercice 2. Soit \mathbb{K} un corps et $R = \mathbb{K}[x_1, x_2]$ l'anneau de polynômes à deux variables et à coefficients dans \mathbb{K} . Alors $\mathbb{K} \cong R/I$ est un R -module, où I est l'idéal engendré par x_1 et x_2 .

a. Montrer que la suite suivante est une suite exacte de R -modules :

$$0 \xrightarrow{d_3} R \xrightarrow{d_2} R \oplus R \xrightarrow{d_1} R \xrightarrow{d_0} \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0 \tag{*}$$

où, pour tous $r, r' \in R$,

$$d_2(r) = (rx_2, -rx_1) \quad d_1((r, r')) = rx_1 + r'x_2 \quad d_0(r) = r + I.$$

b. Appliquer le foncteur $\mathbb{K} \otimes_R -$ à la suite (*) et calculer les R -modules quotients

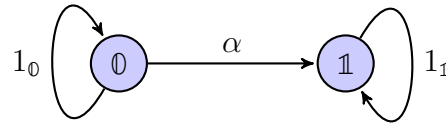
$$\ker(1 \otimes d_n) / \text{im}(1 \otimes d_{n+1}) \quad \text{pour } n \in \{0, 1, 2\}.$$

c. Appliquer le foncteur $\text{Hom}_R(-, \mathbb{K})$ à la suite (*) et calculer les R -modules quotients

$$\ker(d_{n+1}^*) / \text{im}(d_n^*) \quad \text{pour } n \in \{0, 1, 2\}.$$

Exercice 3. [*Transformations naturelles sont « homotopies » entre foncteurs.*] Soit \mathbf{I} la catégorie définie comme suit.

$$\begin{aligned} \text{Obj}(\mathbf{I}) &= \{0, 1\} \\ \text{Hom}_{\mathbf{I}}(0, 0) &= \{1_0\} \\ \text{Hom}_{\mathbf{I}}(1, 1) &= \{1_1\} \\ \text{Hom}_{\mathbf{I}}(0, 1) &= \{\alpha\} \\ \text{Hom}_{\mathbf{I}}(1, 0) &= \{\} \end{aligned}$$



Soit $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs. Montrer qu'une transformation naturelle $\tau : F \rightarrow G$ est la même chose qu'un foncteur¹ $H : \mathcal{C} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $H(-, 0) = F(-)$ et $H(-, 1) = G(-)$.

Exercice 4. Soit $B' \xrightarrow{i} B$ et $B \xrightarrow{p} B''$ deux morphismes de R -modules à gauche. Si, pour tout R -module à gauche M ,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(B'', M) \xrightarrow{p^*} \text{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_R(B', M) \rightarrow 0$$

est une suite exacte, alors

$$0 \rightarrow B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte scindée de R -modules.

Exercice 5. Soit B et C deux R -modules à gauche. On définit

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(B, R) \otimes_R C &\xrightarrow{\nu_B} \text{Hom}_R(B, C) \\ f \otimes c &\longmapsto \widehat{f}_c \end{aligned}$$

où $\widehat{f}_c : B \rightarrow C$ est le R -morphisme donné par $\widehat{f}_c(b) = f(b)c$ pour tout $b \in B$ et tout $c \in C$.

a. Montrer que $\nu = (\nu_B)_{B \in \text{Obj}(R\text{-Mod})}$ est une transformation naturelle

$$\text{Hom}_R(-, R) \otimes_R C \xrightarrow{\nu} \text{Hom}_R(-, C).$$

b. Montrer que si B est un R -module libre qui possède une base finie, alors ν_B est un isomorphisme.

Notes

¹ Le produit cartésien $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ de deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est la catégorie dont

- les objets sont les paires (A, B) avec $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ et $B \in \text{Obj}(\mathcal{D})$;
- les morphismes de (A, B) à (A', B') sont les paires (f, g) où $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ et $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, B')$;
- et la composition des morphismes est donnée par $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$.