Devoir 2

à remettre le 19 mars 2018

Exercice 1.

a. Soit (D, α, β) un produit fibré des R–morphismes f et g.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\Theta"] \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\
& D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "g"] \\
& B \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

Montrer que si f est un monomorphisme, alors α est un monomorphisme, et que si f est un épimorphisme, alors α est un épimorphisme.

b. Énoncer (sans démonstration) le dual de la partie précédente.

c. Soit un diagramme commutatif de ${}_R\mathrm{Mod}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[d, "1_E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\alpha"] & D \arrow[r, "\gamma"] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Montrer que (D, α, β) est la somme amalgamée de f et g.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $R = \mathbb{K}[x_1, x_2]$ l'anneau de polynômes à deux variables et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathbb{K} \cong R/I$ est un R–module, où I est l'idéal engendré par x_1 et x_2.

a. Montrer que la suite suivante est une suite exacte de R-modules :

$$0 \xrightarrow{d_3} R \xrightarrow{d_2} R \oplus R \xrightarrow{d_1} R \xrightarrow{d_0} \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0 \qquad (*)$$

où, pour tous $r, r' \in R$,

$$d_2(r) = (rx_2, -rx_1) \qquad d_1((r, r')) = rx_1 + r'x_2 \qquad d_0(r) = r + I.$$

b. Appliquer le foncteur $\mathbb{K} \otimes_R -$ à la suite $(*)$ et calculer les R–modules quotients

$$\ker(1 \otimes d_n) / \operatorname{im}(1 \otimes d_{n+1}) \qquad \text{pour } n \in \{0, 1, 2\}.$$

c. Appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_R(-, \mathbb{K})$ à la suite $(*)$ et calculer les R–modules quotients

$$\ker(d_{n+1}^*) / \operatorname{im}(d_n^*) \qquad \text{pour } n \in \{0, 1, 2\}.$$

Exercice 3. [*Transformations naturelles sont « homotopies » entre foncteurs.*] Soit $\mathbf{I}$ la catégorie définie comme suit.

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}(\mathbf{I}) &= \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(\mathbb{0}, \mathbb{0}) &= \{1_{\mathbb{0}}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) &= \{1_{\mathbb{1}}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(\mathbb{0}, \mathbb{1}) &= \{\alpha\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(\mathbb{1}, \mathbb{0}) &= \{\} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{0} \arrow[loop left, "1_{\mathbb{0}}"] \arrow[rr, "\alpha"] & & \mathbb{1} \arrow[loop right, "1_{\mathbb{1}}"] \end{tikzcd}$$

Soit $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Montrer qu'une transformation naturelle $\tau : F \to G$ est la même chose qu'un foncteur[1] $H : \mathcal{C} \times \mathbf{I} \to \mathcal{D}$ tel que $H(-, \mathbb{0}) = F(-)$ et $H(-, \mathbb{1}) = G(-)$.

Exercice 4. Soit $B' \xrightarrow{i} B$ et $B \xrightarrow{p} B''$ deux morphismes de R-modules à gauche. Si, pour tout R-module à gauche M,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(B'', M) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(B', M) \to 0$$

est une suite exacte, alors

$$0 \to B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \to 0$$

est une suite exacte scindée de R-modules.

Exercice 5. Soit B et C deux R-modules à gauche. On définit

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(B, R) \otimes_R C &\xrightarrow{\nu_B} \mathrm{Hom}_R(B, C) \\ f \otimes c &\longmapsto \widehat{f}_c \end{aligned}$$

où $\widehat{f}_c : B \to C$ est le R-morphisme donné par $\widehat{f}_c(b) = f(b)c$ pour tout $b \in B$ et tout $c \in C$.

a. Montrer que $\nu = (\nu_B)_{B \in \mathrm{Obj}({}_R\mathrm{Mod})}$ est une transformation naturelle

$$\mathrm{Hom}_R(-, R) \otimes_R C \xrightarrow{\nu} \mathrm{Hom}_R(-, C).$$

b. Montrer que si B est un R-module libre qui possède une base finie, alors ν_B est un isomorphisme.

Notes

[1] Le *produit cartésien* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ de deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est la catégorie dont

- les objets sont les paires (A, B) avec $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ et $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$;
- les morphismes de (A, B) à (A', B') sont les paires (f, g) où $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, B')$;
- et la composition des morphismes est donnée par $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$.