Devoir 3

à remettre le 11 avril 2018

Exercice 1. Montrer que si P est un R–module à droite projectif, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un R–module à gauche injectif.

Exercice 2. Soit ${}_RB_S$ un (R,S)–bimodule qui est un R–module plat, et C_S un S–module injectif. Montrer que $\mathrm{Hom}_S(B,C)$ est un R–module à droite injectif.

Exercice 3. Soit un diagramme commutatif de ${}_R\,\mathrm{Mod}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha_2"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ B_3 \arrow[r, "\beta_2"] & B_2 \arrow[r, "\beta_1"] & B_1 \end{tikzcd}$$

avec P projectif, $\alpha_1 \circ \alpha_2 = 0$, et $B_3 \xrightarrow{\beta_2} B_2 \xrightarrow{\beta_1} B_1$ exacte en B_2. Montrer qu'il existe un morphisme $P \xrightarrow{\varphi_3} B_3$ qui rend le diagramme commutatif.

Exercice 4. Soit B et C deux R-modules à gauche. On définit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(B,R) \otimes_R C & \xrightarrow{\nu_B} & \mathrm{Hom}_R(B,C) \\ f \otimes c & \longmapsto & \widehat{f_c} \end{array}$$

où $\widehat{f_c} : B \to C$ est le R-morphisme donné par $\widehat{f_c}(b) = f(b)c$ pour tout $b \in B$ et tout $c \in C$.

Remarque : Par Exercice 5 de Devoir 2, $\nu = (\nu_B)_B$ est une transformation naturelle entre $\mathrm{Hom}_R(-,R) \otimes_R C$ et $\mathrm{Hom}_R(-,C)$; et ν est un isomorphisme naturel si B est un R-module libre qui possède une base finie.

a. Montrer que si B est un R-module de présentation finie [1] et si C est un R-module plat, alors ν est un isomorphisme naturel.

b. Montrer que $\mathrm{Hom}_R(P,R) \neq \{0\}$ si P est un R–module projectif non nul.

c. Soit ${}_RP$ un R–module de type fini. Montrer que P est projectif ssi $1_P \in \mathrm{im}(\nu)$, où

$$\nu : \mathrm{Hom}_R(P,R) \otimes_R P \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,P)$$
$$\nu(f \otimes x)(y) = f(y)\,x$$

1. Une *présentation libre* d'un module B est une suite exacte $L_1 \to L_0 \to B \to 0$ avec L_0 et L_1 libres. Si L_0 et L_1 sont de type fini, on dit que B est de *présentation finie*.

Exercice 5. Soit un diagramme dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

Posons :

(*i*) $P \xrightarrow{\Theta_{\alpha,\beta}} A \oplus B$ l'unique morphisme déterminé par la propriété universelle de $A \oplus B$ et les morphismes α et β ; et

(*ii*) $A \oplus B \xrightarrow{\Psi_{g,(-f)}} S$ l'unique morphisme déterminé par la propriété universelle de $A \oplus B$ et les morphismes g et $(-f)$.

a. Montrer que le diagramme est commutatif ssi la composition

$$P \xrightarrow{\Theta_{\alpha,\beta}} A \oplus B \xrightarrow{\Psi_{g,(-f)}} S$$

est nulle.

b. Montrer que $0 \to P \to A \oplus B \to S$ est exacte ssi (P, α, β) est un produit fibré de f, g.

c. Soit (P, α, β) un produit fibré de f et g. Montrer les énoncés suivants.

(*i*) $\ker(f) = \beta \circ \ker(\alpha)$. (*Indice: vérifier que* $\beta \circ \ker(\alpha)$ *est un noyau de* f.)

(*ii*) f est un monomorphisme ssi α est un monomorphisme.

(*iii*) Si f est un épimorphisme, alors α est un épimorphisme.

d. Montrer que $P \to A \oplus B \to S \to 0$ est exacte ssi (S, f, g) est une somme amalgamée de α et β.

e. Soit (S, f, g) une somme amalgamée de α et β. Montrer les énoncés suivants.

(*i*) Si α est un monomorphisme, alors (P, α, β) est un produit fibré de f et g.

(*ii*) Si α est un monomorphisme, alors f est un monomorphisme.