Devoir 4

à remettre le 7 mai 2018

Exercice 1. Soit $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$ une suite exacte courte de R–modules.

a. Montrer qu'un morphisme $g : M' \to N$ se prolonge à un morphisme $\tilde{g} : M \to N$ ssi l'image de g par le morphisme de liaison $\partial : \mathrm{Hom}_R(M', N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M'', N)$ est nulle.

b. Énoncer la version duale de l'énoncé de la partie précédente.

Exercice 2. Soit R et S deux anneaux, A_R un R–module à droite, ${}_RB_S$ un (R, S)–bimodule et ${}_SC$ un S–module à gauche. Montrer que si ${}_RB$ est plat et si B_S est plat, alors

$$\mathrm{Tor}^S_n(A \otimes_R B, C) \cong \mathrm{Tor}^R_n(A, B \otimes_S C).$$

(*Indice: montrer que le produit tensoriel de deux modules plats est un module plat.*)

Exercice 3.

a. Montrer que si G est un groupe abélien, alors le foncteur (covariant) $E = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, -)$ est exact à droite, et calculer ses foncteurs dérivés à gauche.

b. Soit G un groupe abélien de torsion. Montrer que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

(*Indice: tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre.*)

continuer à la page suivante

Notation. *On note un complexe par* $\mathbf{A}$ *et ses morphismes par* d_n^A *; par exemple,*

$$\mathbf{A}: \quad \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^A} A_n \xrightarrow{d_n^A} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Un morphisme de complexe est noté $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ un morphisme de complexes de R–modules. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on pose que

$$\textbf{cône}(f)_n = A_{n-1} \oplus C_n$$

et on définit

$$\begin{aligned} d_n^f = d_n^{\textbf{cône}(f)} : \textbf{cône}(f)_n &\longrightarrow \textbf{cône}(f)_{n-1} \\ (a,c) &\longmapsto \big(- d_{n-1}^A(a),\ d_n^C(c) - f_{n-1}(a) \big) \end{aligned}$$

Si l'on considère les éléments de $A_{n-1} \oplus C_n$ comme des vecteurs $\left[\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right]$, alors d_n^f s'exprime comme

$$d_n^f \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{n-1}^A & 0 \\ -f_{n-1} & d_n^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{n-1}^A(a) \\ -f_{n-1}(a) + d_n^C(c) \end{bmatrix}.$$

a. Montrer que $\textbf{cône}(f)$ est un complexe (appelé *cône* sur f).

b. Soit $\mathbf{A[-1]}$ le complexe obtenu de $\mathbf{A}$ en augmentant les indices par 1 : pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{A}[-1]_n = A_{n-1} \qquad \text{et} \qquad d_n^{A[-1]} = -d_{n-1}^A.$$

Montrer qu'il existe une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{u} \textbf{cône}(f) \xrightarrow{v} \mathbf{A}[-1] \longrightarrow 0$$

où $u_n(c) = (0, c)$ pour tout $c \in C_n$ et $v_n(a, c) = -a$ pour tout $(a, c) \in \textbf{cône}(f)$.

c. Montrer que le morphisme de liaison

$$\partial_n : H_n(\mathbf{A}[-1]) \to H_{n-1}(\mathbf{C})$$

est égal à $H_{n-1}(f)$, le morphisme induit de f.

d. Montrer que $\textbf{cône}(f)$ est acyclique ssi $H_n(f)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En déduire que $\textbf{cône}(1_\mathbf{C})$ est acyclique.

e. Soit $\mathbf{C}$ un complexe de ${}_R\mathrm{Mod}$ tel que C_n est projectif et $d_n^C = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\textbf{cône}(1_\mathbf{C})$ est un objet projectif de $\mathbf{Comp}({}_R\mathrm{Mod})$.

> *Remarque : La réciproque est aussi vraie ; tout objet projectif de* $\mathbf{Comp}({}_R\mathrm{Mod})$ *est isomorphe à* $\textbf{cône}(1_\mathbf{C})$*, où* C_n *est projectif et* $d_n^C = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.