Feuille d'exercices 1 : Rappel sur les modules

Exercice 1. Soit M un R–module à gauche.

a. Montrer que $0_R \cdot m = 0_M$ pour tout $m \in M$.

b. Montrer que $r \cdot 0_M = 0_M$ pour tout $r \in R$.

c. Montrer que $(-1_R) \cdot m = -m$ pour tout $m \in M$.

Exercice 2. Soit M un R–module à droite, $a \in R$, $m \in M$ non-nuls tels que $m \cdot a = 0_M$. Montrer que a ne possède pas d'inverse à droite (c'est-à dire, il n'existe pas de $b \in R$ tel que $ab = 1_R$).

Exercice 3. Soit R et S deux anneaux et $\phi : S \to R$ un morphisme d'anneaux. Si M est un R–module à gauche, montrer que M est aussi un S–module à gauche si l'on définit

$$s \cdot m = \phi(s) \cdot m$$

pour tout $s \in S$ et pour tout $m \in M$.

Exercice 4. Soit N, N' deux sous-modules d'un R–module M.

a. Montrer que $N \cap N'$ est un sous-module de M.

b. Montrer que $N + N' = \{n + n' : n \in N, n' \in N'\}$ est un sous-module de M.

Exercice 5. Soit $f : M \to M'$ un morphisme de R–modules à gauche.

a. Montrer que $\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$ est un sous-module de M.

b. Montrer que $\mathrm{im}(f) = \{f(m) \mid m \in M\}$ est un sous-module de M'.

c. Soit U' un sous-module de M'. Montrer que $f^{-1}(U')$ est un sous-module de M.

Exercice 6. Soit R un *anneau intègre* (c'est-à-dire, R est commutatif, unitaire, et si $a, b \in R$ sont non nuls, alors ab est non nul). Pour un R–module à gauche M, on définit

$$\mathrm{Tor}(M) = \{m \in M \ : \text{ il existe } a \in R \ \underline{\text{non-nul}} \text{ tel que } a \cdot m = 0\}.$$

a. Montrer que $\mathrm{Tor}(M)$ est un sous-module de M.

b. Soit $\varphi : M \to N$ un morphisme de R–modules. Montrer que $\varphi(\mathrm{Tor}(M)) \subseteq \mathrm{Tor}(N)$.

Exercice 7. Soit M un R–module à droite. Montrer que M est simple ssi *pour tout* $m \in M$ non-nul, on a que $M = \{m \cdot a : a \in R\}$.

Exercice 8. Soit $f : M \to N$ un morphisme de R–modules à gauche et K un sous-module de M tel que $K \subseteq \ker(f)$. Montrer que la correspondance

$$\begin{aligned} \overline{f} : M/K &\longrightarrow N \\ m + K &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

est un morphisme de R–modules. *(Il faut aussi montrer que $\overline{f}$ est bien défini.)*

Exercice 9. Soit R un anneau commutatif, J un idéal de R, M un R-module et

a. Soit JM l'ensemble des combinaison linéaires finies de la forme $\sum_i j_i m_i$, où $j_i \in J$ et $m_i \in M$:
$$JM = \left\{ \sum_{\text{fini}} j_i m_i : j_i \in J, m_i \in M \right\}.$$
Montrer que JM est un sous-module de M.

b. Montrer que M/JM est un R/J-module si l'on définit :
$$(r + J) \cdot (m + JM) = rm + JM$$

c. Montrer que si $JM = \{0\}$, alors on peut munir M d'une structure de R/J–module.

d. En déduire que si J est un idéal maximal de R tel que $JM = \{0\}$, alors M est un espace vectoriel sur R/J.

e. Soit I un idéal maximal de R et F un R–module libre avec base B. Montrer que F/IF est un espace vectoriel sur R/I et que $\{b + IF : b \in B\}$ est une base de F/IF.

Exercice 10. Soit M un R–module à droite et $X \subseteq M$ un sous-ensemble quelconque. On définit l'*annulateur* $\operatorname{Ann}_R(X)$ de X dans R comme étant l'ensemble
$$\operatorname{Ann}_R(X) = \{a \in R : x \cdot a = 0 \text{ pour tout } x \in X\}.$$

a. Montrer que $\operatorname{Ann}_R(X)$ est un idéal à droite de R.

b. Montrer que si X est un sous-module de M alors $\operatorname{Ann}_R(X)$ est un idéal bilatère de R.

c. Montrer que M admet une structure naturelle de $R/\operatorname{Ann}_R(M)$–module (à droite).

d. Un module M est dit *fidèle* si $\operatorname{Ann}_R(M) = 0$. Montrer que tout R–module M est fidèle en tant que $R/\operatorname{Ann}_R(M)$–module.

Exercice 11. (*Propriété universelle de* $\ker(f)$) Soit $f : M \to N$ un morphisme de R–modules. On montrera que le noyau K de f est uniquement déterminé par la propriété suivante :

(i) il existe un morphisme de R–modules $\ell : K \to M$ tel que $f \circ \ell = 0$; et

(ii) si $\ell' : K' \to M$ est un morphisme de R–modules tel que $f \circ \ell' = 0$, alors il existe un unique morphisme de R–modules $u : K' \to K$ tel que $\ell' = \ell \circ u$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\ell"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ K' \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "\ell'"'] & & \end{tikzcd}$$

Explicitement :

a. Montrer que le noyau de f vérifie les conditions (i) et (ii).

b. Montrer que si K est un R–module qui vérifie (i) et (ii), alors K est le noyau de f.

Exercice 12. Soit R un anneau intègre et I un idéal (à gauche) principal non nul de R. Montrer que $I \cong R$ en tant que R–modules.

Exercice 13. Soit R un anneau commutatif et I et J des idéaux de R. Montrer que l'on a un isomorphisme de R–modules $I \cdot (R/J) \cong (I + J)/J$.

Exercice 14. Montrer que tout R-module est isomorphe à un quotient d'un R-module libre.

Exercice 15. Soit N un sous-module d'un R–module M. Montrer que si M/N et N sont de type fini, alors M est de type fini.

Exercice 16. Soit N un R–module et M un R–module monogène.

a. Montrer que $M \cong R/I$, où I est un idéal à gauche de R.

b. Montrer que $\operatorname{Hom}_R(M, N) \cong \{n \in N : an = 0 \text{ pour tout } a \in I\}$.

c. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, montrer que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\operatorname{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}$.

Exercice 17. Soit R un anneau commutatif, M un R–module et $a \in R$ un élément nilpotent. Montrer que aM est un sous-module de M. Montrer que $aM = M$ ssi $M = 0$.

Exercice 18. *Pour un idéal I d'un anneau R et un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit I^n comme l'ensemble des combinaison linéaire finie des éléments de la forme $i_1 \cdots i_n$, où $i_1, \ldots, i_n \in I$.* Soit R un anneau commutatif, et I un idéal de R tel que $I^n = \{0\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : M \to N$ un R-morphisme. Montrer que si l'application $\overline{\varphi} : M/IM \to N/IN$ définie par $\overline{\varphi}(m + IM) = \varphi(m) + IN$ est surjective, alors φ est surjective.

Exercice 19. Soit M et N des R–modules avec M non nul et N indécomposable. Soit $f : M \to N$ et $g : N \to M$ deux morphismes de R–modules tels que $g \circ f$ est un automorphisme. Montrer que f et g sont des isomorphismes.

Exercice 20. Soit $p : M \to M$ un morphisme de R–modules tel que $p^2 = p$. Montrer que $M \cong \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p)$.