Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Montrer que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Montrer que $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{C}$.

Exercice 3.

a. Montrer que le tenseur élémentaire $2 \otimes 1 \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est nul.

b. Montrer que le tenseur élémentaire $2 \otimes 1 \in 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est non-nul.

Exercice 4. Soit $m, n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A/nA$ pour tout groupe abélien A.

b. En déduire que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, où d est le pgcd de n et m.

c. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, où d est le pgcd de n et m.

Exercice 5. Montrer que le morphisme induit par l'injection $j : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{j \otimes \mathrm{Id}} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

est nul.

Exercice 6. Soit I un idéal bilatère de R et M un R-module à gauche.

a. Montrer que la correspondance suivante est une application R-biadditive :

$$\begin{array}{rcl} R/I \times M & \to & M/IM \\ (r+I, m) & \mapsto & rm + IM \end{array}$$

b. Montrer que $(R/I) \otimes_R M \cong M/IM$ en tant que R-modules à gauche.

Exercice 7. Soit I l'idéal de $\mathbb{Z}[x]$ engendré par 2 et x. Remarquer que $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

a. Montrer que l'application $\beta : I \times I \to \mathbb{Z}[x]/I$ définie par

$$\beta\left(p(x), q(x)\right) = \frac{p(0)}{2}\, q'(0)$$

est $\mathbb{Z}[x]$–bilinéaire.

b. En déduire qu'il existe un $\mathbb{Z}[x]$-morphisme $I \otimes_{\mathbb{Z}[x]} I \to \mathbb{Z}[x]/I$ donné par

$$p(x) \otimes q(x) \mapsto \frac{p(0)}{2}\, q'(0).$$

c. En déduire que $2 \otimes x \neq x \otimes 2$.

d. Montrer que $2 \otimes x - x \otimes 2$ est annihilé par 2 et par x.

e. Montrer que le sous-module engendré par $2 \otimes x - x \otimes 2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[x]/I$.

Exercice 8. Soit R un anneau. Soit M_R un R-module quelconque et ${}_RN$ un R-module libre avec base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

a. Montrer que tout élément de $M \otimes_R N$ s'exprime de façon unique sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes e_i, \text{ avec } m_i \in M.$$

b. En déduire que si $\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes e_i = 0$, alors $m_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 9. Soit R un anneau *commutatif* et A et B deux R-modules.

a. Montrer que $A \otimes_R B$ est un R-module, où $r(a \otimes b) = (ra) \otimes b = a \otimes (rb)$.

b. Montrer que l'application $A \times B \to A \otimes_R B$ définie par $(a, b) \mapsto a \otimes b$ est R-bilinéaire.

c. Montrer que pour tout R-module M et pour toute application R-bilinéaire $g : A \times B \to M$, il existe un unique R-morphisme $\tilde{g} : A \otimes_R B \to M$ tel que $\tilde{g}(a \otimes b) = g(a, b)$.

Exercice 10. Soit R un *anneau intègre* et Q son corps des fractions. Si A est un R-module, montrer que tout élément de $Q \otimes_R A$ est de la forme $q \otimes a$, où $q \in Q$ et $a \in A$.

Exercice 11. Soit R un *anneau intègre*. Pour un R-module M, on définit

$$\operatorname{Tor}(M) = \{m \in M \,:\, \text{il existe } r \in R \text{ } \textit{non-nul} \text{ tel que } r \cdot m = 0\}.$$

a. Montrer que $\operatorname{Tor}(M)$ est un sous-module de M.

b. Soit $\varphi : M \to N$ un morphisme de R-modules. Montrer que $\varphi(\operatorname{Tor}(M)) \subseteq \operatorname{Tor}(N)$.

c. Soit Q le corps des fractions de R. Montrer qu'il existe un isomorphisme de R-modules

$$Q \otimes_R M \cong Q \otimes_R (M/\operatorname{Tor}(M)).$$

(Utiliser les techniques vues dans le cours pour construire le R–morphisme $q \otimes m \longmapsto q \otimes (m + \operatorname{Tor}(M))$ et sa réciproque $q \otimes (m + \operatorname{Tor}(M)) \longmapsto q \otimes m$.)

d. Soit I et J deux idéaux de R et $\mu : I \otimes_R J \to IJ$ le R-morphisme définit sur les tenseurs élémentaires par $\mu(a \otimes b) = ab$. Montrer que

$$\operatorname{Tor}(I \otimes_R J) = \ker\left(I \otimes_R J \xrightarrow{\mu} IJ\right).$$