Feuille d'exercices 3

Bimodules

Exercice 1. Soit R et S deux anneaux. Montrer les énoncés suivants.

a. Pour ${}_RA_S$ et ${}_RB$, $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ est un S-module à gauche par $sf : a \mapsto f(as)$.

b. Pour ${}_RA_S$ et B_S, $\mathrm{Hom}_S(A,B)$ est un R-module à droite par $fr : a \mapsto f(ra)$.

c. Pour ${}_SB_R$ et A_R, $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ et un S-module à gauche par $sf : a \mapsto s\left(f(a)\right)$.

d. Pour ${}_SB_R$ et ${}_SA$, $\mathrm{Hom}_S(A,B)$ est un R-module à gauche par $fr : a \mapsto f(a)r$.

Exercice 2. Soit R un anneau commutatif. Montrer que $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R) \otimes_R \mathrm{Mat}_{m\times m}(R)$ est isomorphisme à $\mathrm{Mat}_{nm\times nm}(R)$: (i) en tant que (R,R)-bimodule ; et (ii) en tant que R-algèbre.

Morphismes, monomorphismes, épimorphismes

Exercice 3. Montrer que l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est un épimorphisme et un monomorphisme dans la catégorie d'anneaux **Ann** (pas nécessairement unitaire). Remarquer qu'un morphisme qui est un épimorphisme et un monomorphisme n'est pas forcément un isomorphisme.

Exercice 4. Soit **Band** la catégorie de semigroupes idempotents (semigroupe dont tout élément x satisfait $x^2 = x$) dont les morphismes sont des morphismes de semigroupes.

a. Montrer que tout monomorphisme dans **Band** est injectif.

b. Est-ce que tout monomorphisme dans la catégorie de monoïdes **Mon** est injectif ?

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

a. Montrer qu'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ est un monomorphisme ssi l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y) : g \mapsto f \circ g$ est injective pour tout $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

b. Montrer qu'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ est un épimorphisme ssi l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) : h \mapsto h \circ f$ est injective pour tout $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

a. Montrer qu'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ admet un inverse à droite ssi l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y) : g \mapsto f \circ g$ est surjective pour tout $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

b. Montrer qu'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ admet un inverse à gauche ssi l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) : h \mapsto h \circ f$ est surjective pour tout $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Exercice 7.

a. Montrer que tout monomorphisme qui admet un inverse à droite est un isomorphisme.

b. Montrer que tout épimorphisme qui admet un inverse à gauche est un isomorphisme.

Exercice 8. Soit $X \xrightarrow{g} Y$ et $Y \xrightarrow{f} Z$ deux morphisme d'une catégorie $\mathcal{C}$.

a. Si $f \circ g$ est un monomorphisme, alors g est un monomorphisme.

b. Si f et g sont des monomorphismes, alors $f \circ g$ est un monomorphisme.

c. Si $f \circ g$ est un épimorphisme, alors f est un épimorphisme.

d. Si f et g sont des épimorphisme, alors $f \circ g$ est un épimorphisme.

e. Si f est un isomorphe, alors f est un monomorphisme et un épimorphisme.

f. Si deux parmi f, g et $f \circ g$ sont isomorphismes, alors f, g et $f \circ g$ sont isomorphismes.

Objet initial, objet final, objet nul

Exercice 9. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie.

a. Montrer qu'un objet initial/final/nul dans $\mathbf{C}$ est unique à *unique* isomorphisme près.

b. Montrer que le groupe trivial est un objet nul dans les catégories **Ab** et **Gr**.

c. Montrer que ni **Ens** ni **Top** admet des objet nuls.

d. Soit $\{x\}$ un ensemble à un seul élément. Montrer que $(\{x\}, x)$ est un objet nul dans $\mathbf{Ens}_*$ et dans $\mathbf{Top}_*$.

e. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}$ est un objet initial dans la catégorie $\mathbf{Ann_1}$ et que l'anneau nul (l'anneau à un seul élément) est l'objet final.

Exercice 10. Soit F un objet final dans la catégorie **Ens**.

a. Montrer qu'il y a une bijection entre les éléments d'un ensemble A et les morphismes de **Ens** de la forme $F \to A$.

b. Si $A \xrightarrow{f} B$ est un morphisme de **Ens**, montrer qu'il y a une bijection entre les éléments de $\mathrm{im}(f)$ et les morphismes de la forme $F \to A \xrightarrow{f} B$.

Exercice 11. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, I un objet initial de $\mathcal{C}$ et F un objet final de $\mathcal{C}$.

a. Montrer que tout morphisme de la forme $A \to I$ admet un inverse à droite.

b. Montrer que tout morphisme de la forme $F \to B$ admet un inverse à gauche.

c. Montrer que s'il existe un morphisme de F vers I dans $\mathcal{C}$, alors F et I sont isomorphes.