Feuille d'exercices 4

(Co)Produits

Exercice 1. Soit A et B des groupes abéliens.

a. Montrer que le produit cartesien $A \times B$ est le coproduit de A et B dans la catégorie **Ab** de groupes abéliens.

b. Montrer que $A \times B$ n'est pas le coproduit de A et B dans la catégorie **Gr** de groupes.

(*Indice: considérer des morphismes de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *dans* S_3.)

Exercice 2. Pour un ensemble Z, on définit $F(Z)$ comme le groupe libre sur Z. Montrer que si X et Y sont deux ensembles disjoints, alors $F(X \cup Y) = F(X) \sqcup F(Y)$ dans **Groupe**.

Exercice 3. Montrer que la catégorie des groupes finis n'admet pas de coproduit. Plus précisément, montrer qu'il n'existe pas un groupe fini qui est le coproduit de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui possède un objet final F et qui admet produits ($\sqcap$).

a. Montrer que $F \sqcap A \cong A \cong A \sqcap F$.

b. Montrer que $(A \sqcap B) \sqcap C \cong A \sqcap (B \sqcap C)$ pour tous $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admet produits ($\sqcap$) et coproduits ($\sqcup$). Pour trois objets $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, on définit

$$\mathcal{G} = (A \sqcap C) \sqcup (B \sqcap C) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D} = (A \sqcup B) \sqcap C.$$

a. Montrer qu'il existe une flèche dans $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{D}$.

b. Donner un exemple pour montrer qu'il n'y a pas nécessairement une flèche $\mathcal{D} \to \mathcal{G}$.

Produits fibrés, sommes amalgamées

Exercice 6. Soit B et C des sous-ensembles d'un ensemble A. Montrer que :

a. le produit fibré dans **Ens** de $B \xrightarrow{\mathrm{incl}_B} A$ et $C \xrightarrow{\mathrm{incl}_C} A$ est $B \cap C$; et

b. la somme amalgamée dans **Ens** de $B \cap C \xrightarrow{\mathrm{incl}} B$ et $B \cap C \xrightarrow{\mathrm{incl}} C$ est $B \cup C$.

Exercice 7. Soit A, B, C des groupes abéliens et **Ab** la catégorie des groupes abéliens.

a. Montrer que le produit fibré de $B \xrightarrow{f} A$ et $C \xrightarrow{g} A$ dans **Ab** est

$$D = \{(b, c) \in B \oplus C : f(b) = g(c)\},$$

où $\alpha : D \to C$ et $\beta : D \to B$ sont définis par $\alpha(b, c) = c$ et $\beta(b, c) = b$.

b. Montrer que la somme amalgamée de $A \xrightarrow{g} C$ et $A \xrightarrow{f} B$ dans **Ab** est

$$D = (B \oplus C)/N, \qquad \text{où } N = \{(f(a), -g(a)) : a \in A\},$$

et où $B \xrightarrow{\alpha} D$ et $C \xrightarrow{\beta} D$ sont définis par $\alpha(b) = (b, 0) + N$ et $\beta(c) = (0, c) + N$.