Feuille d'exercices 5

Objets groupes

Exercice 1. Soit X un ensemble muni de deux opérations notées $*$ et $\circledast$ vérifiant :

- il existe un élément $e \in X$ tel que $e * x = x * e = x$ pour tout $x \in X$;
- il existe un élément $e_\circ \in X$ tel que $e_\circ \circledast x = x \circledast e_\circ = x$ pour tout $x \in X$;
- $(x \circledast y) * (u \circledast v) = (x * u) \circledast (y * v)$ pour tout $x, y, u, v \in X$.

a. Montrer que $e = e_\circ$.

b. Montrer que $x \circledast y = x * y$; en déduire que les deux opérations $*$ et $\circledast$ coincident.

c. Montrer que $x * y = y * x$; en déduire que les deux opérations $*$ et $\circledast$ sont commutatives.

d. Montrer que les deux opérations $*$ et $\circledast$ sont associatives.

e. En déduire qu'un objet groupe dans la catégorie des groupes est un groupe abélien.

Exercice 2. Soit

$$\left(G, \quad G \sqcap G \xrightarrow{\mu} G, \quad F \xrightarrow{\varepsilon} G, \quad G \xrightarrow{\text{inv}} G\right)$$

un objet groupe d'une une catégorie $\mathcal{C}$ qui admet produits (notés $\sqcap$) et un objet final F.

En cours, on a vu que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G)$ est un groupe avec opération (notée $\circledast$) définie par

$$f \circledast g = \mu \circ (f \sqcap g),$$

où $f \sqcap g$ est le morphisme de $\mathcal{C}$ donné par la propriété universelle de $G \sqcap G$ (voir Figure 1).

En utilisant cette description de $\circledast$, montrer que $\varepsilon \circ \zeta$ est l'élément neutre de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G)$, où ζ et l'unique morphisme de X vers F ; c'est-à-dire, montrer que

$$f \circledast (\varepsilon \circ \zeta) = f = (\varepsilon \circ \zeta) \circledast f \quad \text{pour tout } X \xrightarrow{f} G.$$

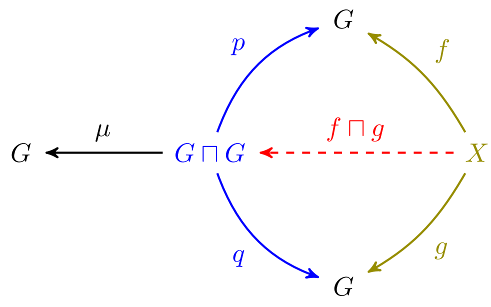

FIGURE 1 – Définition de $f \sqcap g$

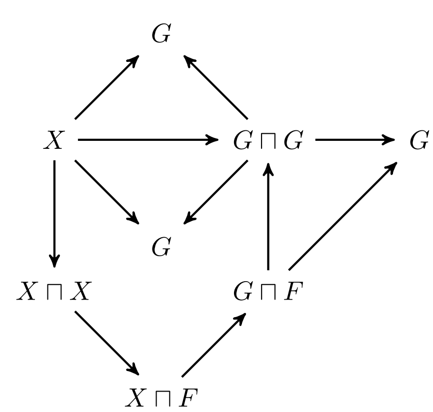

FIGURE 2 – Indication