Feuille d'exercices 6

Suites exactes

Exercice 1. Soit $f : M \to N$ un morphisme de R–modules. Montrer les énoncés suivants.

a. f est un monomorphisme ssi $0 \to M \xrightarrow{f} N$ est une suite exacte.
b. f est un épimorphisme ssi $M \xrightarrow{f} N \to 0$ est une suite exacte.
c. f est un isomorphisme ssi $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ est une suite exacte.
d. La suite $0 \to \ker(f) \xrightarrow{\text{incl}} M \xrightarrow{f} N$, où incl est l'inclusion canonique, est exacte.
e. La suite $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\text{proj}} \text{coker}(f) \to 0$, où proj est la projection canonique, est exacte.
f. La suite $0 \to \ker(f) \xrightarrow{\text{incl}} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\text{proj}} \text{coker}(f) \to 0$ est exacte.

Exercice 2. Soit un diagramme commutatif de ${}_R\text{Mod}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où φ_1, φ_2 et φ_3 sont isomorphismes. Montrer que

$$0 \to A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \to 0 \text{ est exacte} \qquad \text{ssi} \qquad 0 \to B_1 \xrightarrow{\beta_1} B_2 \xrightarrow{\beta_2} B_3 \to 0 \text{ est exacte.}$$

Exercice 3. Soit $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ une suite exacte. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

a. f est une *section* : c'est-à-dire, il existe un morphisme $Y \xrightarrow{h} X$ tel que $h \circ f = 1_X$.
b. g est une *rétraction* : c'est-à-dire, il existe un morphisme $Z \xrightarrow{h} Y$ tel que $g \circ h = 1_Z$.
c. la suite est *scindée* : c'est-à-dire, il existe un morphisme $Y \xrightarrow{h} X \oplus Z$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\text{incl}_1"] & X \oplus Z \arrow[r, "\text{proj}_2"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\text{incl}_1(x) = (x, 0)$ et $\text{proj}_2(x, z) = z$.

Exercice 4. Supposons que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[d, "\varphi_3"] \\ 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de ${}_R\mathrm{Mod}$ à lignes exactes et avec φ_2 et φ_3 monomorphismes.

a. Montrer qu'il existe un unique R–morphisme $\varphi_1 : A_1 \to B_1$ rendant le diagramme (avec φ_1) commutatif.

b. Montrer que φ_1 est un isomorphisme ssi φ_2 et φ_3 sont isomorphismes.

Modules projectifs, injectifs, plats

Exercice 5. Soit R un anneau intègre. Montrer que si R est un R–module injectif, alors R est un corps.

Exercice 6. Montrer que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est à la fois injectif et projectif en tant que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$–module.

Exercice 7. Soit $P \xrightarrow{g} N$ et $M \xrightarrow{f} N$ deux morphismes dans ${}_R\mathrm{Mod}$ avec P projectif.

a. Montrer qu'il existe $P \xrightarrow{h} M$ dans ${}_R\mathrm{Mod}$ tel que $f \circ h = g$ ssi $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{im}(f)$.

b. Énoncer et prouver le dual de la partie précédente.

Exercice 8. Montrer que si P est un R–module à droite projectif, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un R–module à gauche injectif.

Exercice 9. Soit ${}_R B_S$ un (R, S)–bimodule qui est un R–module plat, et C_S un S–module injectif. Montrer que $\mathrm{Hom}_S(B, C)$ est un R–module à droite injectif.

Exercice 10. Soit

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de R–modules. Montrer que si A et C sont plats, alors B est plat.

Exercice 11. Montrer que P est projectif ssi pour tout épimorphisme $f : I \to J$ avec I injectif et tout morphisme $u : P \to J$ il existe $\Theta : P \to I$ tel que $f \circ \Theta = u$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\Theta"'] \arrow[d, "u"] & \\ I \arrow[r, "f"] & J \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Divers

Exercice 12. Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de R–modules à gauche. Montrer que f est injectif ssi le morphisme $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est surjectif.