

Feuille d'exercices 7

Catégories additives

Exercice 1. Soit \mathcal{C} une catégorie additive avec objet nul 0 .

- a. Montrer que l'unique morphisme $A \rightarrow 0$ est l'élément neutre du groupe $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 0)$.
- b. Montrer que l'unique morphisme $0 \rightarrow B$ est l'élément neutre du groupe $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, B)$.
- c. Montrer que l'unique morphisme $A \rightarrow 0 \rightarrow B$ est l'élément neutre de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Exercice 2. Soit \mathcal{C} une catégorie qui admet un objet nul et u un morphisme de \mathcal{C} .

- a. Montrer que $\ker(u)$ est un monomorphisme.
- b. Montrer que $\text{coker}(u)$ est un épimorphisme.

Exercice 3. Soit u un morphisme d'une catégorie additive \mathcal{C} .

- a. Montrer que si $\ker(u)$ existe, alors u est un monomorphisme ssi $\ker(u) = 0$.
- b. Montrer que si $\text{coker}(u)$ existe, alors u est un épimorphisme ssi $\text{coker}(u) = 0$.

Catégories abéliennes

Exercice 4. Soit $A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\varphi} C$ des morphismes d'une catégorie abélienne \mathcal{A} .

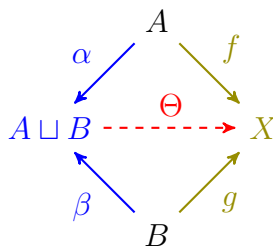
- a. Montrer que si φ est un monomorphisme, alors $\ker(\varphi \circ \alpha) = \ker(\alpha)$.
- b. Montrer que si ψ est un épimorphisme, alors $\text{coker}(\alpha \circ \psi) = \text{coker}(\alpha)$.

Exercice 5.

- a. Montrer que tout isomorphisme d'une catégorie additive est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.
- b. Montrer que tout morphisme f d'une catégorie abélienne est un isomorphisme ssi f est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

Exercice 6. Soit A et B deux objets d'une catégorie additive \mathcal{C} .

- a. Soit $(A \sqcup B, \alpha, \beta)$ un coproduit de A et B . Montrer que α et β sont monomorphismes.



- b. Énoncer (sans démonstration) le dual de la partie précédente.
- c. Soit $(P, P \xrightarrow{p} A, P \xrightarrow{q} B)$ un produit de A et B . Montrer que p et q sont épimorphismes.