Feuille d'exercices 7

Catégories additives

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive avec objet nul $\mathbb{0}$.

a. Montrer que l'unique morphisme $A \to \mathbb{0}$ est l'élément neutre du groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathbb{0})$.
b. Montrer que l'unique morphisme $\mathbb{0} \to B$ est l'élément neutre du groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{0}, B)$.
c. Montrer que l'unique morphisme $A \to \mathbb{0} \to B$ est l'élément neutre de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admet un objet nul et u un morphisme de $\mathcal{C}$.

a. Montrer que $\ker(u)$ est un monomorphisme.
b. Montrer que $\mathrm{coker}(u)$ est un épimorphisme.

Exercice 3. Soit u un morphisme d'une catégorie additive $\mathcal{C}$.

a. Montrer que si $\ker(u)$ existe, alors u est un monomorphisme ssi $\ker(u) = 0$.
b. Montrer que si $\mathrm{coker}(u)$ existe, alors u est un épimorphisme ssi $\mathrm{coker}(u) = 0$.

Catégories abéliennes

Exercice 4. Soit $A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\varphi} C$ des morphismes d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

a. Montrer que si φ est un monomorphisme, alors $\ker(\varphi \circ \alpha) = \ker(\alpha)$.
b. Montrer que si ψ est un épimorphisme, alors $\mathrm{coker}(\alpha \circ \psi) = \mathrm{coker}(\alpha)$.

Exercice 5.

a. Montrer que tout isomorphisme d'une catégorie additive est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.
b. Montrer que tout morphisme f d'une catégorie abélienne est un isomorphisme ssi f est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.

Exercice 6. Soit A et B deux objets d'une catégorie additive $\mathcal{C}$.

a. Soit $(A \sqcup B, \alpha, \beta)$ un coproduit de A et B. Montrer que α et β sont monomorphismes.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \sqcup B \arrow[rr, dashed, "\Theta"] & & X \\
 & B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

b. Énoncer (sans démonstration) le dual de la partie précédente.
c. Soit $(P, P \xrightarrow{p} A, P \xrightarrow{q} B)$ un produit de A et B. Montrer que p et q sont épimorphismes.