# Feuille d'exercices 8

***Notation.*** *On note un complexe par* $\mathbf{A}$ *et ses morphismes par* $d_n^A$ *; par exemple,*

$$\mathbf{A}: \quad \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^A} A_n \xrightarrow{d_n^A} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

*Un morphisme de complexe est noté* $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$.

## Lemme du serpent

**Exercice 1.** Soit $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} E$ une suite exacte de $R$–modules.

*a.* Montrer que $\alpha$ est surjectif ssi $\gamma$ est injectif.

*b.* Montrer que si $\alpha$ et $\delta$ sont isomorphisme, alors $C = \{0\}$.

*c.* Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(\alpha) \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} \ker(\delta) \longrightarrow 0$$

est exacte, où $\varphi(b + \operatorname{im}(\alpha)) = \beta(b)$ et $\psi(c) = \gamma(c)$.

**Exercice 2.** Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ des $R$–morphismes. Montrer que l'on a une suite exacte

$$0 \to \ker(f) \to \ker(g\circ f) \to \ker(g) \to \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(g\circ f) \to \operatorname{coker}(g) \to 0.$$

## Homotopies

**Exercice 3.** Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes.

*a.* Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif, et $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ deux morphismes de $\mathbf{Comp}(\mathcal{A})$. Montrer que si $f$ et $g$ sont homotopes, alors $F(f)$ et $F(g)$ sont homotopes.

*b.* Soit $g : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et $f : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ deux morphismes de $\mathbf{Comp}(\mathcal{A})$. Montrer que si $f \simeq 0$ *ou* si $g \simeq 0$, alors $f \circ g \simeq 0$.

**Exercice 4.** Soit $A$ et $B$ deux objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

*a.* Montrer que

$$\mathbf{C}: \qquad \cdots \to 0 \to 0 \to A \xrightarrow{\alpha} A \oplus B \xrightarrow{q} B \to 0 \to 0 \to \cdots$$

est un complexe acyclique, où $\alpha$ et $q$ sont donné par la définition de (co)produit. (*Donner une démonstration qui n'utilise pas le théorème de Freyd et Mitchell.*)

*b.* Montrer que $1_{\mathbf{C}}$ et $0_{\mathbf{C}}$ sont homotopes.

## Homologie et la suite exacte longue d'homologie

**Exercice 5.** Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un morphisme de complexes. Montrer que, si $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Coker}(f)$ sont des complexes exacts, alors $H_n(f)$ est un isomorphisme pour tout $n$.

**Exercice 6.** Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et

$$0 \to \mathbf{A} \xrightarrow{i} \mathbf{B} \xrightarrow{p} \mathbf{C} \to 0$$

une suite exacte courte de $\mathbf{Comp}(\mathcal{A})$ tel que $d_n^A = 0$, $d_n^B = 0$, et $d_n^C = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la suite exacte longue d'homologie associée à cette suite exacte courte est

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{0} A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{p_n} C_n \xrightarrow{0} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

## Objets projectifs dans $\mathbf{Comp}(\mathcal{A})$

**Exercice 7.** Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $P$ un objet projectif de $\mathcal{A}$, et $k \in \mathbb{Z}$.

*a.* Soit $\Sigma^k(1_P)$ le complexe

$$\Sigma^k(1_P) : \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_{k+1}=0} P \xrightarrow{d_k = 1_P} P \xrightarrow{d_{k-1}=0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Montrer que $\Sigma^k(1_P)$ est un objet projectif de $\mathbf{Comp}(\mathcal{A})$.

*b.* Montrer que si $\mathcal{A}$ possède assez d'objets projectifs, alors $\mathbf{Comp}(\mathcal{A})$ possède assez d'objets projectifs.

**Exercice 8.** Montrer que la suite de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$–modules

$$\cdots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \cdots$$

est une suite exacte qui consiste d'objets projectifs de ${}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}\mathrm{Mod}$, mais qui n'est pas un objet projectif de $\mathbf{Comp}({}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}\mathrm{Mod})$.

## Foncteurs dérivés

**Exercice 9.** Soit $T$ un foncteur exact à droite. Montrer que s'il existe $n > 0$ tel que $L_nT$ est exact à droite, alors $L_mT$ est le foncteur nul pour tout $m \geq n$.

**Exercice 10.** Soit $R \to S$ un morphisme d'anneaux tel que $S$ est un $R$–module plat. Montrer que $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \otimes_R B \cong \mathrm{Tor}_n^S(M \otimes_R B, N \otimes_R B)$.

**Exercice 11.** Soit $I$ un idéal a droite et $J$ un idéal a gauche de l'anneau $R$. Montrer que $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) \cong (I \cap J)/IJ$.

**Exercice 12.** Soit $G$ un groupe abélien. Montrer que le foncteur $T = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, -)$ est exact à gauche, et calculer les foncteurs dérivés à droite $R_nT$.

**Exercice 13.** Soit $G$ un groupe abélien. Montrer que le foncteur *contravariant* $F = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, G)$ est exact à droite, et calculer les foncteurs dérivés à gauche $L_nF$.