Devoir 1

à remettre le 22 février 2021

Exercice 1. Soit G un groupe fini et V un $\mathbb{C}G$-module de dimension finie.
Montrer que l'application $\pi : V \to V$ définie par

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v \qquad \text{(pour tout } v \in V\text{)}$$

est un morphisme de $\mathbb{C}G$-modules tel que $\pi^2 = \pi$ et

$$\mathrm{im}(\pi) = \{v \in V : g \cdot v = v \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Exercice 2. Soit G un groupe fini et V un $\mathbb{C}G$-module de dimension finie et non nulle.

a. Soit K un sous-groupe de G et $u \in V$ un vecteur non nul vérifiant

$$ku \in \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{u\} \text{ pour tout } k \in K.$$

Montrer que si $G/K = \{g_1K, \ldots, g_rK\}$ est l'ensemble de classes à gauche modulo K, alors

$$U = \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{\ g_1u,\ g_2u,\ \ldots,\ g_ru\ \}$$

est un sous-module de V.

b. Soit H un sous-groupe *abélien* de G. Expliquer pourquoi il existe $u \in V$, $u \neq 0$, tel que

$$hu \in \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{u\} \text{ pour tout } h \in H.$$

c. En déduire que si V est un $\mathbb{C}G$-module simple et si H est un sous-groupe abélien de G, alors

$$\dim(V) \leq \big|G/H\big|.$$

Exercice 3. Soit G un groupe fini et V un $\mathbb{C}G$-module simple de dimension finie.

L'objectif est d'étudier les sous-modules de $V \oplus V$. Nous avons les sous-modules suivants :

$$V \oplus V, \quad \mathbb{0} := \{(0,0)\}, \quad V \oplus \{0\} := \{(v,0) : v \in V\}, \quad \{0\} \oplus V := \{(0,v) : v \in V\}.$$

a. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que $U = \big\{(\alpha v, \beta v) : v \in V\big\}$ est un sous-module de $V \oplus V$.

b. Soit W un sous-module de $V \oplus V$. Montrer que l'application π définie par $\pi\big((v,v')\big) = v$ pour tout $(v,v') \in W$ est un morphisme de $\mathbb{C}G$-modules de W dans V.

c. Supposons que V est simple et que W un sous-module de $V \oplus V$ tel que $W \neq V \oplus V$.
Montrer que si W possède un élément de la forme $(v,0)$ avec $v \neq 0$, alors $W = V \oplus \{0\}$.

d. Soit W un sous-module de $V \oplus V$ qui est différent de $V \oplus V$, $\mathbb{0}$, $V \oplus \{0\}$, et $\{0\} \oplus V$.
Montrer que pour tout $v \in V$, il existe un *unique* élément $\varphi(v) \in V$ tel que $(v, \varphi(v)) \in W$.

e. Montrer que φ définit un morphisme de $\mathbb{C}G$-modules de V dans V.

f. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $W = \big\{(v, \lambda v) : v \in V\big\}$ et que $W \cong V$.