Devoir 2

à remettre le 24 mars 2021

Exercice 1. Soit χ un caractère irréductible de G. On définit un élément dans l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$ par

$$\varepsilon_\chi = \frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}\,g.$$

a. Montrer que $\varepsilon_\chi h = h\varepsilon_\chi$ pour tout $h \in G$; en déduire que ε_χ appartient au centre de $\mathbb{C}G$.

b. Soit V un $\mathbb{C}G$-module simple. Montrer que :
- si $\chi_V \neq \chi$, alors $\varepsilon_\chi v = 0$ pour tout $v \in V$;
- si $\chi_V = \chi$, alors $\varepsilon_\chi v = v$ pour tout $v \in V$.

(indice: *$\pi(v) = \varepsilon_\chi v$ est un morphisme de modules ; calculer sa trace*)

c. Soit $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_t$ une décomposition d'un $\mathbb{C}G$-module W en somme directe de sous-modules simples. Montrer que

$$\varepsilon_\chi W = \{\varepsilon_\chi w : w \in W\} = W_{i_1} + W_{i_2} + \cdots + W_{i_m},$$

où $W_{i_1}, W_{i_2}, \ldots, W_{i_m}$ sont les facteurs directs de la décomposition dont le caractère est χ.

d. Soit $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ les caractères irréductibles de G. En déduire que

$$\varepsilon_{\chi_1} + \varepsilon_{\chi_2} + \cdots + \varepsilon_{\chi_k} = 1_{\mathbb{C}G} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{\chi_i}\,\varepsilon_{\chi_j} = \begin{cases}\varepsilon_{\chi_i}, & \text{si } \chi_i = \chi_j,\\ 0, & \text{si } \chi_i \neq \chi_j.\end{cases}$$

(indice: *considérer l'élément neutre du module régulier et appliquer les parties précédentes*)

Exercice 2. Soit H un sous-groupe d'un groupe fini G, et V un G-module (sur $\mathbb{C}$) qui possède un <u>*sous-espace*</u> W qui est stable pour l'action de H :

$$h\vec{w} \in W \text{ pour tout } h \in H \text{ et pour tout } \vec{w} \in W.$$

Autrement dit, W est un « sous-H-module » de V (mais pas forcément un sous-G-module).

a. Pour $g \in G$, on définit

$$gW = \{g\vec{w} : \vec{w} \in W\}.$$

Montrer que, pour tous $g_1, g_2 \in G$, si $g_1H = g_2H$, alors $g_1W = g_2W$.

b. Supposons qu'il existe $x \in G$ tel que $G/H = \{H, xH\}$ et

$$V = W \oplus xW.$$

Si ψ est le caractère du <u>H-module</u> W et χ est le caractère du <u>G-module</u> V, montrer que

$$\chi(g) = \begin{cases}\psi(g) + \psi(x^{-1}gx), & \text{si } g \in H,\\ 0, & \text{si } g \notin H.\end{cases}$$

(indice: *$(xb_1, \ldots, xb_d)$ est une base de xW si $(b_1, \ldots, b_d)$ est une base de W*)

Exercice 3. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble de parties de $\{1,2,3,4\}$ de cardinalité 2 :

$$\mathfrak{X} = \Big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\Big\}.$$

On définit une action du groupe symétrique S_4 sur $\mathfrak{X}$ par

$$\sigma \cdot \{i,j\} = \big\{\sigma(i),\sigma(j)\big\} \qquad \text{pour } \sigma \in S_4,\ \{i,j\} \in \mathfrak{X}. \tag{$*$}$$

Soit $V = \mathbb{C}^6$ l'espace vectoriel dont les éléments de la base canonique $\{e_1,\ldots,e_6\}$ sont étiquettés par les éléments de $\mathfrak{X}$ de la manière suivante :

$$v_{\{1,2\}} = e_1, \quad v_{\{1,3\}} = e_2, \quad v_{\{1,4\}} = e_3, \quad v_{\{2,3\}} = e_4, \quad v_{\{2,4\}} = e_5, \quad v_{\{3,4\}} = e_6.$$

On associe à toute permutation $\sigma \in S_4$ la matrice qui correspond à l'action de σ sur $\mathfrak{X}$. Par exemple, pour la transposition $(2\,3) \in S_4$ on obtient la matrice suivante :

$$\begin{array}{c} \\ \{1,2\} \\ \{1,3\} \\ \{1,4\} \\ \{2,3\} \\ \{2,4\} \\ \{3,4\} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{2,3\} & \{2,4\} & \{3,4\} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

a. Calculer le caractère χ de cette représentation matricielle de S_4.

b. Exprimer le caractère χ comme somme de caractères irréductibles de S_4.

c. Décomposer V en somme directe de sous-modules simples (il suffit de trouver une base de V qui manifest la décomposition — l'exercice 1 pourrait être utile).