Devoir 3

à remettre le 28 avril 2021

Exercice 1. Déterminer la table de caractère de A_4 (le groupe de permutations paires dans S_4).

Attention : l'ensemble de 3-cycles ne forment pas une seule classe de conjugaison !

Exercice 2. Voici les quatre premières lignes de la table de caractères d'un certain groupe fini G :

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	6	2	0	0	-1	-1
χ_3	7	-1	-1	1	0	0
χ_4	3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$

$$\left(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i\right)$$

où $g_1, \ldots, g_6$ sont des représentants des classes de conjugaison de G.

a. Complèter la table de caractères de G.

b. Déterminer la dimension de chaque représentation irréductible de G.

c. Déterminer la cardinalité de G et la cardinalité de chaque classe de conjugaison de G.

d. Déterminer les sous-groupes normaux de G.

Exercice 3. Soit V un $\mathbb{C}G$-module et $V^{\otimes 3} = V \otimes V \otimes V$.

Rappelons que :

— si $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_d)$ est une base de V, alors tout élément de $V^{\otimes 3}$ admet une unique écriture sous la forme $\displaystyle\sum_{1 \le i,j,k \le d} \lambda_{i,j,k}(b_i \otimes b_j \otimes b_k)$ avec $\lambda_{i,j,k} \in \mathbb{C}$.

— $V^{\otimes 3}$ est un $\mathbb{C}G$-module avec action définie sur les tenseurs élémentaires par

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = (gv_1) \otimes (gv_2) \otimes (gv_3) \qquad (g \in G; v_1, v_2, v_3 \in V)$$

a. On définit une application linéaire $\gamma : V^{\otimes 3} \longrightarrow V^{\otimes 3}$ comme l'extension linéaire de

$$\gamma(b_i \otimes b_j \otimes b_k) = b_j \otimes b_k \otimes b_i \qquad \text{pour tous } 1 \le i,j,k \le d,$$

où $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_d)$ est une base de V. Montrer que $\gamma(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_2 \otimes v_3 \otimes v_1$ pour tous $v_1, v_2, v_3 \in V$ et que γ est un morphisme de $\mathbb{C}G$-modules.

b. Posons $\omega = e^{2\pi i/3}$. Montrer que $U = \left\{ u \in V^{\otimes 3} : \gamma(u) = \omega\, u \right\}$ est un sous-module de $V^{\otimes 3}$.

c. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_d)$ une base de V. Montrer que les éléments suivants forment une base de U :

$$\mu_{(i,j,k)} = \big(b_i \otimes b_j \otimes b_k\big) + \tfrac{1}{\omega}\big(b_j \otimes b_k \otimes b_i\big) + \tfrac{1}{\omega^2}\big(b_k \otimes b_i \otimes b_j\big),$$

pour tous $1 \le i,j,k \le d$ tels que $i \le j < k$ ou $i < k \le j$.

d. En déduire que le caractère de U est $\chi_U(g) = \dfrac{1}{3}\Big(\chi_V(g)^3 - \chi_V(g^3)\Big)$.