Feuille d'Exercices 1

Représentations matricielles

Exercice 1.
Soit D_4 le groupe des isométries du carré à sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

a. Choisir une base de $\mathbb{R}^2$ et exprimer les isométries dans cette base.

b. Déterminer si cette représentation matricielle de D_4 est irréductible.

Exercice 2. *(Restriction d'une représentation à une sous-groupe)* Soit $\xi : S_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ la représentation standard de S_3, et H le sous-groupe de S_3 engendré par le cycle $(1,2,3)$.

a. Montrer que la restriction $\xi|_H : H \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est une représentation de H.

b. Montrer que cette représentation n'est pas irréductible.

Exercice 3. Soit $\varphi : H \to G$ un morphisme de groupes et $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation.

a. Montrer que la composition $\rho \circ \varphi$ est une représentation de H.

b. Montrer que si ρ est irréductible et φ est surjectif, alors $\rho \circ \varphi$ est irréductible.

Exercice 4. Soit G le groupe avec présentation

$$G = \left\langle a, b \;\middle|\; a^4,\ b^2,\ b^{-1}aba \right\rangle.$$

a. Montrer que

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \rho(b) = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

se prolonge en une représentation de G sur $\mathbb{C}$.

(indice: *Propriété universelle de groupes définis par générateurs et relations*)

b. Déterminer si ρ est une représentation irréductible de G sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ une représentation d'un groupe fini G.
Montrer que s'il existe $g, h \in G$ tels que $\rho(g)\rho(h) \neq \rho(h)\rho(g)$, alors ρ est irréductible.

Exercice 6. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation matricielle de G de dimension n.
Montrer que l'application $g \mapsto \det(\rho(g))$ est une représentation de G de dimension 1.

Exercice 7. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation matricielle d'un groupe fini G. On définit l'application $\rho^* : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^\top$, où $M^\top$ désigne la transposée d'une matrice M. Montrer que ρ^* est une représentation matricielle de G de dimension n.