Feuille d'Exercices 2

Sous-modules et simplicité

Exercice 1. Soit U et W deux sous-modules d'un G-module V.

a. Montrer que $U \cap W$ est un sous-module de V.

b. Montrer que $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ est un sous-module de V.

c. Montrer que $V = U \oplus W$ ssi $V = U + W$ et $U \cap W = \{0\}$.

Exercice 2. Soit U et W deux sous-modules d'un G-module V.

a. Montrer que si U est simple, alors $U \cap W = \{0\}$ ou $U \cap W = U$.

b. Montrer que si U et W sont simples, alors $U \cap W = \{0\}$ ou $U = W$.

Exercice 3. Montrer qu'un G-module V est simple ssi pour tout $v \in V$ non nul, on a que V est engendré (comme espace vectoriel) par les éléments $\{gv : g \in G\}$.

Exercice 4. Soit V un G-module de dimension 2. Montrer que s'il existe $g, h \in G$ et $v \in V$ tels que $ghv \neq hgv$, alors V est simple.

Exercice 5. Soit G un groupe fini et V un $\mathbb{C}G$-module de dimension 3. Montrer que V est simple ssi il n'existe pas un vecteur $v \in V$ tel que $gv \in \mathrm{vect}_{\mathbb{K}}(v)$ pour tout $g \in G$.

Exercice 6. Soit V un G-module. L'ensemble des *invariants (ou G-invariants)* de V est

$$V^G = \{v \in V : gv = v \text{ pour tout } g \in G\}.$$

a. Montrer que V^G est un sous-module de V.

b. Trouver une décomposition de V^G en somme directe de sous-modules simples.

Compléments sur le Théorème de Maschke

Exercice 7. (*Contre-example au Théorème de Maschke dont le groupe est infini.*)
Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs muni du produit usuel.
Définir une fonction $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} 1 & \log(r) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}^+.$$

a. Montrer que ρ est un représentation matricielle de $\mathbb{R}^+$.

b. Soit W le sous-espace de $\mathbb{C}^2$ défini par $W = \{\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : c \in \mathbb{C}\}$. Montrer que W est stable pour la représentation ρ ; c'est-à-dire, montrer que $\rho(r)w \in W$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ et tout $w \in W$.

c. Montrer qu'il n'existe pas de sous-espace stable $U \subset \mathbb{C}^2$ tel que $\mathbb{C}^2 = W \oplus U$.

(indice: *exprimer $\rho(r)$ dans une base différente*)

Exercice 8. (*Contre-example au Théorème de Maschke dont le groupe est infini.*)
Soit G le groupe de matrices

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Alors, $\mathbb{C}^2$ est un G-module. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

a. Montrer que le sous-espace W de $\mathbb{C}^2$ engendré par e_1 est un sous-module.

b. Montrer qu'il n'existe pas de sous-module $U \subset \mathbb{C}^2$ tel que $\mathbb{C}^2 = W \oplus U$.

Exercice 9. (*Contre-example au Théorème de Maschke dont la caractèristique du corps divise l'ordre du groupe.*) Soit p un nombre premier, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $C_p = \{1, g, g^2, \ldots, g^{p-1}\}$ le groupe cyclique à p éléments. Soit $\varphi : C_p \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ la fonction définie par

$$\varphi(g^j) = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout } j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

a. Montrer que $V = \mathbb{F}_p^2$ est un C_p-module de dimension 2.

b. Montrer que le sous-espace W de V engendré par $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ est un sous-module de V.

c. Montrer qu'il n'existe pas de sous-module U de V tel que $V = W \oplus U$.