Feuille d'Exercices 3

Sous-groupe dérivé

Exercice 1. Soit G' le sous-groupe dérivé de G et $Ab(G) = G/G'$.

a. Montrer que si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation complexe de G de dimension 1, alors l'application $\widehat{\rho}$ défini par $\widehat{\rho}(gG') = \rho(g)$ est une représentation irréductible de $Ab(G)$.

b. Montrer que si $\varphi : Ab(G) \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation complexe irréductible de $Ab(G)$, alors l'application $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(gG')$ est une représentation complexe de G de dimension 1.

c. En déduire qu'il y a une bijection entre les représentations complexes de dimension 1 de G est les représentations complexes irréductibles de $Ab(G)$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini et G' son sous-group dérivé. Montrer que G' est égal à l'intersection des noyaux de caractères linéaires :

$$G' = \bigcap_{\chi \text{ caractère linéaire}} \ker(\chi) = \bigcap_{\chi \text{ caractère linéaire}} \{g \in G : \chi(g) = \chi(e) = 1\}.$$

(rappel: $\ker(\chi) = \{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$)

Table de caractères

Exercice 3. Le *groupe des quaternions*, noté Q, est le groupe d'ordre 8 avec éléments

$$Q = \{1, -1, \boldsymbol{i}, -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, -\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}\}$$

et relations :

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1 \qquad \text{et} \qquad (-1)^2 = 1.$$

a. Montrer que

$$\rho(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(\boldsymbol{i}) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \rho(\boldsymbol{j}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

se prolonge en une représentation complexe de Q.

b. Calculer le caractère de la représentation ρ.

c. Montrer que la représentation ρ est irréductible.

d. Montrer que le sous-groupe dérivé de Q est $Q' = \{1, -1\}$.

e. Montrer que $Q/Q' \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

f. Calculer les classes de conjugaison de Q.

g. Sachant que le nombre de caractères irréductibles d'un groupe G coincide avec le nombre de classes de conjugaison de G, calculer la table de caractères de Q.

(indice: *utiliser les caractères de* Q/Q')

Classes de conjugaison de S_n

Exercice 4. Soit S_n le groupe symétrique sur n éléments.

a. Soit $(a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)$ un cycle et σ une permutation dans S_n. Montrer que

$$\sigma(a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\, \sigma(a_2)\, \ldots\, \sigma(a_k)).$$

b. Soit α une permutation dans S_n et

$$\alpha = \big(a\, b\, c\, \ldots\big)\big(i\, j\, k\, \ldots\big)\cdots\big(u\, v\, w\, \ldots\big)$$

sa décomposition comme produit de cycles disjoints. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$ on a

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} = \Big(\sigma(a)\, \sigma(b)\, \sigma(c)\, \ldots\Big)\Big(\sigma(i)\, \sigma(j)\, \sigma(k)\, \ldots\Big)\ldots\Big(\sigma(u)\, \sigma(v)\, \sigma(w)\, \ldots\Big).$$

c. Montrer que deux permutations dans S_n sont conjuguées ssi elles ont le même type cyclique (c'est-à-dire, même nombre de cycles de chaque longueur).

d. Montrer que le nombre de classes de conjugaison de S_n est égal au nombre de partages de n. Rappel : une *partage* d'un entier n est une suite finie $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ d'entiers strictement positifs telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$.

e. Calculer une représentant de chaque classe de conjugaison de S_4.

Certaines représentations de S_4

Exercice 5. Soit $s_1 = (1\,2)$, $s_2 = (2\,3)$ et $s_3 = (3\,4)$ les transpositions adjacentes dans S_4. Rappel : le groupe symétrique S_4 est engendré par s_1, s_2 et s_3 et admet la présentation

$$S_4 = \Big\langle s_1, s_2, s_3 \;\Big|\; s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = e,\ s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2,\ s_2s_3s_2 = s_3s_2s_3,\ s_1s_3 = s_3s_1 \Big\rangle.$$

a. Posons

$$\tau(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau(s_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau(s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que τ se prolonge en une représentation complexe de S_4, calculer son caractère et déterminer si elle est irréductible. Si elle n'est pas irréductible, décomposer la représentation.

b. Posons

$$\xi(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xi(s_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \xi(s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que ξ se prolonge en une représentation complexe de S_4, calculer son caractère et déterminer si elle est irréductible. Si elle n'est pas irréductible, décomposer la représentation.

Orthogonalité des caractères irréductibles

Exercice 6. Soit W un $\mathbb{C}G$-module de dimension finie et $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ les caractères irréductibles distincts de G étiquetés de sorte que $\chi_1 = \chi_{\text{triv}}$.

a. Expliquer pourquoi il existe $m_i \in \mathbb{N}$ tels que

$$\chi_W = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \cdots + m_k\chi_k.$$

b. Montrer que

$$\langle \chi_W, \chi_{\text{triv}} \rangle = m_1 = \dim(W^G),$$

où W^G est le sous-module des G-invariants de W :

$$W^G = \{w \in W : gw = w \text{ pour tout } g \in G\}.$$

c. En déduire que

$$\dim(W^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_W(g).$$

Exercice 7. *(Voici une autre façon de prouver que* $\dim(V^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$*.)*

Soit G un groupe fini et V un $\mathbb{C}G$-module de dimension finie.

a. Montrer que l'application $\pi : V \to V$ définie par

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot v \qquad (\text{pour tout } v \in V)$$

est un morphisme de $\mathbb{C}G$-modules tel que $\pi^2 = \pi$ et $\operatorname{im}(\pi) = V^G$.

b. Soit P une matrice telle que $P^2 = P$. Montrer que la trace de P coincide avec le rang de P.

c. En déduire que

$$\dim(V^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$$