Feuille d'Exercices 4

Exercice 1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Montrer que la fonction $\chi : G \to \mathbb{C}$ définie par
$$\chi(g) = \big|\{x \in X : g \cdot x = x\}\big| - 1,$$
est un caractère de G. Est-il forcément irréductible ?

Exercice 2. *(Une autre démonstration de la première relation d'orthogonalité)*

Soit V et W des $\mathbb{C}G$-modules.

a. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, muni de l'action
$$(g \cdot T)(v) = gT(g^{-1}v) \text{ pour tout } v \in V,$$
est un $\mathbb{C}G$-module de caractère $\chi_V \overline{\chi_W}$.

b. Montrer que le sous-module de G-invariants de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ est
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W).$$

c. En déduire que la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ est $\langle \chi_V, \chi_W \rangle$.

d. En déduire que si V et W sont simples, alors
$$\big\langle \chi_V, \chi_W \big\rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } \chi_V = \chi_W, \\ 0, & \text{si } \chi_V \neq \chi_W. \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $\alpha : G \to \mathbb{C}$ une application de G dans $\mathbb{C}$. Montrer que α est une fonction centrale de G ssi l'application suivante est un morphisme de $\mathbb{C}G$-modules pour tout $\mathbb{C}G$-module V :
$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \sum_{g \in G} \alpha(g)\, gv. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit G le sous-groupe du groupe symétrique S_7 engendré par les permutations suivantes.
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$
Calculer la table de caractères de G.

(indice: $\alpha^7 = \epsilon$, $\beta^3 = \epsilon$, $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^2$, *où* ϵ *est la permutation identité.*)

Exercice 5. Soit G un groupe d'ordre 720 dont les tailles des classes de conjugaison sont donné par la première ligne de la table suivante. Les deuxième et troisième lignes donnent les valeurs de deux caractères de G.

	1	15	40	90	45	120	144	120	90	15	40
χ_1	6	2	0	0	2	2	1	1	0	-2	3
χ_2	21	1	-3	-1	1	1	1	0	-1	-3	0

a. Montrer que χ_1 et χ_2 ne sont pas des caractères irréductibles.

b. Montrer que $\chi_1 - \chi_{\text{triv}}$ est caractère irréductible de G.

c. En déduire que G possède un caractère irréductible de dimension 5 et un de dimension 16.

Produit tensoriel

Exercice 6. Soit G un groupe fini, et V et W des G-modules sur $\mathbb{C}$ tels que $\dim(W) = 1$. Montrer que $V \otimes W$ est un G-module simple ssi V est un G-module simple.

Exercice 7. Soit V un $\mathbb{C}G$-module de dimension d, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres de $g \in G$ agissant sur V (avec multiplicité). Déterminer les valeurs propres de g sur $S(V \otimes V)$ et $A(V \otimes V)$.

Exercice 8. Soit V_{triv}, V_{signe} et V_{std} les S_4-modules trivial, signe et standard, respectivement. Calculer les caractères et les dimensions des S_4-modules suivants, et détermine s'ils sont simples.

a. $S(V_{\text{triv}} \otimes V_{\text{triv}})$

b. $A(V_{\text{signe}} \otimes V_{\text{signe}})$

c. $A(V_{\text{std}} \otimes V_{\text{std}})$

d. $S((V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{signe}}) \otimes (V_{\text{triv}} \oplus V_{\text{signe}}))$.

Exercice 9. La table suivante présente quelques informations sur les classes de conjugaison d'un certain groupe G ainsi que les valeurs d'un caractère irréductible χ de G, où $g_1 = e$ et $\omega = e^{2\pi i/3}$.

représentant de la classe de conjugaison	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
taille de la classe de conjugaison de g_j	1	1	6	4	4	4	4
$\chi(g_j)$	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω	ω^2
classe de conjugaison contenant g_j^2	g_1	g_1	g_2	g_5	g_4	g_4	g_5

a. Vérifier que χ est un caractère irréductible de G.

b. Calculer χ_S et χ_A.

c. Montrer que χ_S et χ_A sont des caractères irréductibles de G.

d. En considérant les produits χ_A^2, $\chi_A\chi$, et $\chi_A^2\chi$, déterminer la table de caractères de G.