Feuille d'Exercices 5

Caractères irréductibles de $G \times H$

Exercice 1. Soit G et H deux groupes finis. Pour $\alpha : G \to \mathbb{C}$ et $\beta : H \to \mathbb{C}$, on note par $\alpha \times \beta$ la fonction de $G \times H$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$(\alpha \times \beta)(g,h) = \alpha(g)\beta(h) \text{ pour tout } (g,h) \in G \times H.$$

a. Montrer que deux éléments (g,h) et (g',h') de $G \times H$ sont conjugués ssi g et g' sont conjugués dans G et h et h' sont conjugués dans H.

b. Montrer que si α est une fonction centrale de G et β est une fonction centrale de H, alors $\alpha \times \beta$ est une fonction centrale de $G \times H$.

c. Montrer que si χ est un caractère irréductible de G et ψ est un caractère irréductible de H, alors $\chi \times \psi$ est un caractère irréductible de $G \times H$.

d. Montrer que tout caractère irréductible de $G \times H$ est de la forme $\chi \times \psi$ avec χ un caractère irréductible de G et ψ un caractère irréductible de H.

e. Déterminer la table de caractères de $S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Indicateur de Frobenius–Schur

Exercice 2. Soit G est un groupe dont la première colonne de la table de caractères est $1, 1, 1, 1, 2, 8$.

a. Déterminer la table de caractères de G.

b. En déduire que $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes Q$ ou $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes D_4$, où D_4 est le groupe diédral d'ordre 8, Q est le groupe des quaternions, et C_3 est le groupe cyclique d'ordre 3.

c. Notons par $\iota(\chi)$ l'indicateur de Frobenius–Schur d'un caractère irréductible χ. Utiliser l'égalité

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \iota(\chi)\, \chi(e) = \left| \{ g \in G : g^2 = e \} \right|$$

pour conclure que $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes Q$.

Restriction

Exercice 3. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Montrer que si ψ est un caractère irréductible de H, alors il existe un caractère irréductible χ de G tel que

$$\left\langle \mathrm{Res}_H^G(\chi), \psi \right\rangle_H \neq 0.$$

(indice: *Considérer le produit scalaire de ψ et la restriction du caractère régulier de G.*)

Induction

Exercice 4. Soit H le sous-groupe de S_3 engendré par la permutation $c = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\rho : H \longrightarrow \mathbb{C}$ la représentation de dimension 1 de H définie par $\rho(c) = e^{2\pi i/3}$.

a. Déterminer la dimension de la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$.

b. Déterminer les matrices $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)(\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_3$.

c. Déterminer le caractère de $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ de deux façons :

(i) en utilisant les matrices obtenues dans la partie précédente ; et

(ii) à l'aide de la formule du caractère induit : $\mathrm{Ind}_H^G(\psi) = \frac{1}{|H|} \sum_{a \in G} \psi(a^{-1}ga)$.

d. Exprimer le caractère de $\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho)$ comme somme de caractères irréductibles de S_3.

e. Soit S_2 le sous-groupe de S_3 engendré par la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
Exprimer $\mathrm{Res}_{S_2}^{S_3}(\mathrm{Ind}_H^{S_3}(\rho))$ comme somme de caractères irréductibles de S_2.

Exercice 5. Soit G un groupe fini et H, K des sous-groupes de G tels que $H \subseteq K \subseteq G$. Montrer que si ψ est un caractère de H, alors

$$\mathrm{Ind}_K^G\left(\mathrm{Ind}_H^K(\psi)\right) = \mathrm{Ind}_H^G(\psi).$$

Exercice 6. Soit H un sous-groupe d'un groupe fini G et ψ un caractère de H. Montrer que si H est normal dans G, alors $\mathrm{Ind}_H^G(\psi)(g) = 0$ pour tout $g \notin H$.

Réciprocité de Frobenius

Exercice 7. Soit N un sous-groupe normal d'un groupe fini G et χ un caractère irréductible de G tel que $\langle \mathrm{Res}_N^G(\chi), \mathbb{1}_N \rangle_N \neq 0$, où $\mathbb{1}_N$ est le caractère trivial de N. Montrer que $N \subseteq \ker(\chi)$.

Exercice 8. Soit H un sous-groupe de G, ψ un caractère de H, et χ un caractère de G.

a. Expliquer pourquoi le produit $\chi\,\mathrm{Ind}_H^G(\psi)$ est un caractère de G.

b. Expliquer pourquoi le produit $\psi\,\mathrm{Res}_H^G(\chi)$ est un caractère de H.

c. Expliquer pourquoi $\mathrm{Ind}_H^G\left(\psi\,\mathrm{Res}_H^G(\chi)\right)$ est un caractère de G.

d. Montrer que

$$\mathrm{Ind}_H^G\left(\psi\,\mathrm{Res}_H^G(\chi)\right) = \chi\,\mathrm{Ind}_H^G(\psi).$$

(indice: *calculer le produit scalaire avec tout caractère irréductible de G*)