Feuille d'Exercices 6

Sur les modules de Specht

Exercice 1. Soit λ et μ des partages de n. Montrer que la relation définie par

$$\lambda \trianglelefteq \mu \qquad \text{ssi} \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \leq \mu_1 + \cdots + \mu_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}$$

est un ordre partiel sur l'ensemble de partages de n. Identifier l'éléments minimaux et maximaux.

Exercice 2. Soit CST_λ l'ensemble de tableaux de Young à colonnes croissantes de forme $\lambda \vdash n$. Montrer que la relation sur CST_λ définie par

$$T <_{\mathsf{PL}} S \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{l} \text{il existe } i \in [n] \text{ tel que} \\ \mathrm{pos}_T(j) = \mathrm{pos}_S(j) \text{ pour tout } 1 \leq j < i \text{ et } \mathrm{ligne}_T(i) > \mathrm{ligne}_S(i). \end{array}$$

est un ordre total. Identifier l'éléments minimaux et maximaux.

Exercice 3. Soit $T_1, T_2 \in \mathrm{CST}_\lambda$. Montrer que si $T_1 <_{\mathsf{PL}} T_2$, alors $T_2 \wedge T_1$ n'est pas admissible.

Exercice 4. Soit $S, T \in \mathrm{CST}_\lambda$. Posons $P_T = \sum_{\sigma \in R(T)} \sigma$. Montrer que si $P_T e_S \neq 0$, alors $T \wedge S$ est admissible.

Exercice 5. Soit T un tableau de Young, H un sous-groupe de $C(T)$, et $t_1, t_2, \ldots, t_m$ des représentants de $C(T)/H$. Montrer que

$$N_T = \left(\sum_{i=1}^{m} \mathsf{sign}(t_i) t_i \right) \left(\sum_{h \in H} \mathsf{sign}(h) h \right).$$