

Indice

Exercice 3.

Montrer qu'un treillis est distributif ssi il ne contient pas de sous-treillis qui est isomorphe à



L'idée générale de la démonstration est assez simple :

Si T est un treillis qui possède trois éléments $x, y, z \in T$ tels que

$$x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

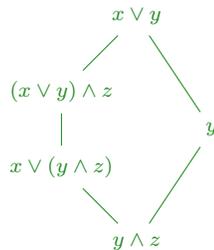
alors on considère le sous-treillis engendré par $x, y, z, x \vee (y \wedge z)$ et $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$, et on montre qu'il possède un sous-treillis isomorphe à ou .

La difficulté de la démonstration réside dans l'organisation de l'argument. Voici une façon possible d'organiser l'argument.

a. Soit T un treillis qui possède trois éléments $x, y, z \in T$ tels que

$$x \leq z \quad \text{et} \quad x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Alors, T possède le sous-treillis suivant :



b. Supposer que T ne possède pas d'éléments x, y, z tels que

$$x \leq z \quad \text{et} \quad x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Soit $x, y, z \in T$ tels que $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Alors $x \not\leq z$ et $x \not\leq y$, et T possède le sous-treillis :

