

### Indice

**Exercice 3.**



Montrer qu'un treillis est distributif ssi il ne contient pas de sous-treillis qui est isomorphe à



L'idée générale de la démonstration est assez simple :

*Si  $T$  est un treillis qui possède trois éléments  $x, y, z \in T$  tels que*

$$x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

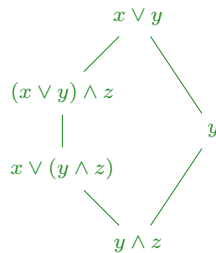
*alors on considère le sous-treillis engendré par  $x, y, z, x \vee (y \wedge z)$  et  $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ , et on montre qu'il possède un sous-treillis isomorphe à  ou .*

La difficulté de la démonstration réside dans l'organisation de l'argument. Voici une façon possible d'organiser l'argument.

a. Soit  $T$  un treillis qui possède trois éléments  $x, y, z \in T$  tels que

$$x \leq z \quad \text{et} \quad x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Alors,  $T$  possède le sous-treillis suivant :



b. Supposer que  $T$  ne possède pas d'éléments  $x, y, z$  tels que

$$x \leq z \quad \text{et} \quad x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Soit  $x, y, z \in T$  tels que  $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ .

Alors  $x \not\leq z$  et  $x \not\leq y$ , et  $T$  possède le sous-treillis :

