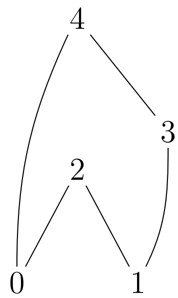
Devoir 1

à remettre le 28 septembre 2017

Exercice 1. Soit E l'ensemble ordonné avec diagramme de Hasse donné par



a. Calculer la fonction de Möbius $\mu(x, y)$ pour tous $x, y \in E$. Donner la réponse sous la forme d'une matrice avec les lignes et les colonnes étiquetées par 0, 1, 2, 3, 4. Calculer l'inverse de la matrice (utiliser *SageMath* ou *Maple*).

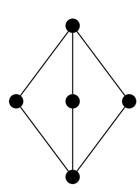
b. Calculer le diagramme de Hasse de $J(E)$, où $J(E)$ est l'ensemble ordonné par inclusion des parties *commençantes* de E. Identifier les éléments sup-irréductibles de $J(E)$.

c. Calculer le diagramme de Hasse de $\Gamma(E)$, où $\Gamma(E)$ est l'ensemble ordonné par inclusion des parties *finissantes* de E. Identifier les éléments inf-irréductibles de $\Gamma(E)$.

d. Montrer qu'il existe une bijection entre les parties commençantes et les parties finissantes d'un ensemble ordonné.

Exercice 2. *(Propriété de pointe fixe)*
Soit T un treillis *fini* et $f : T \to T$ une application croissante. Montrer que f a un pointe fixe ; c'est-à dire, montrer qu'il existe un élément t dans T tel que $f(t) = t$.

Exercice 3.
Montrer qu'un treillis est distributif ssi il ne contient pas de sous-treillis qui est isomorphe à



ou