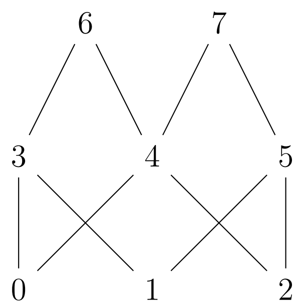
Devoir 2

à remettre le 26 octobre 2017

Exercice 1. Soit E l'ensemble ordonné défini par le diagramme de Hasse suivant.



a. Dessiner le complexe d'ordre $\Delta(E)$ de E.

b. Soit $\widehat{E} = E \cup \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$. Calculer $\mu_{\widehat{E}}(\widehat{0}, \widehat{1})$ et $\widetilde{\chi}(\Delta(E))$.

Exercice 2. Soit E un ensemble ordonné fini possédant un minimum et un maximum et tel que pour tous $x, y, z \in E$, si $z \lessdot x$ et $z \lessdot y$, alors x et y admettent un supremum dans E. Montrer que E est un treillis.

Exercice 3. Soit E un ensemble ordonné fini et $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction. On définit

$$h(x, y) = \sum_{\substack{z \in E \\ z \geq x \\ z \geq y}} f(z).$$

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_{|E|}$ une extension linéaire de E, et H la matrice de taille $|E| \times |E|$ avec

$$H_{i,j} = h(x_i, x_j).$$

a. Montrer que
$$\det(H) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_{|E|}).$$

b. Montrer que, pour tout $x \in E$,
$$f(x) = \sum_{\substack{x \leq e_1 \\ x \leq e_2}} \mu(x, e_1) h(e_1, e_2) \mu(x, e_2).$$

c. Soit T un treillis fini. Montrer que si $\mu(x, \widehat{1}) \neq 0$ pour tout $x \in T$, alors il existe une permutation σ des éléments de T telle que $x \vee \sigma(x) = \widehat{1}$ pour tout $x \in T$.