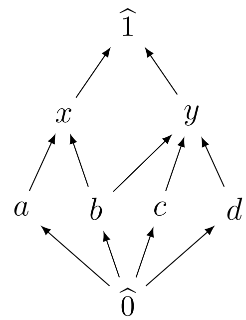
Devoir 3

à remettre le 28 novembre 2017

Exercice 1. Soit T le treillis défini par le diagramme de Hasse suivant.



a. Identifier les indépendants, dépendants, circuits, circuits brisés, et SCBs.

b. Utiliser le Théorème de Sagan pour calculer $\mu(\widehat{0}, t)$ pour tout $t \in T$.

Exercice 2. Soit T un treillis fini, $\mathcal{A}(T)$ l'ensemble des atomes de T, et $\triangleleft$ un ordre total sur $\mathcal{A}(T)$. Posons

$$\mathrm{SCB}_{\triangleleft}(T) = \{X \subseteq \mathcal{A}(T) : X \text{ ne contient pas un circuit brisé (pour l'ordre total } \triangleleft)\}.$$

a. Montrer que $\mathrm{SCB}_{\triangleleft}(T)$ est un complexe simplicial abstrait sur $\mathcal{A}(T)$.

b. Posons $a = \min_{\triangleleft}(\mathcal{A}(T))$. Montrer que $X \in \mathrm{SCB}_{\triangleleft}(T)$ ssi $X \cup \{a\} \in \mathrm{SCB}_{\triangleleft}(T)$.

Exercice 3. Soit $k < n$ et $P_{n,k}$ l'ensemble de parties de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinalité k.

> Si les éléments d'un ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in P_{n,k}$ satisfont $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, alors on écrit $\{a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}$.

On définit un relation $\trianglelefteq$ sur $P_{n,k}$ par :

$$\{a_1 < a_2 < \cdots < a_k\} \trianglelefteq \{b_1 < b_2 < \cdots < b_k\} \quad \text{ssi} \quad a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \ldots, a_k \leq b_k.$$

a. Montrer que $P_{n,k}$ est un treillis. *(Indice: Exercice 2 de Devoir 2)*

b. Soit $\leq_B$ l'ordre de Bruhat sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Montrer que

$$u \leq_B v \quad \text{implique} \quad \{u(1), \ldots, u(k)\} \trianglelefteq \{v(1), \ldots, v(k)\} \text{ pour tout } k \in [n].$$

c. **(Bonus/Défi)** Montrer la réciproque :

$$u \leq_B v \quad \text{ssi} \quad \{u(1), \ldots, u(k)\} \trianglelefteq \{v(1), \ldots, v(k)\} \text{ pour tout } k \in [n].$$