Devoir 4

à remettre le 19 décembre 2017

(mis-à-jour le 6 décembre 2017)

Exercice 1. Soit $P = \mathrm{conv}(V) \in \mathbb{R}^d$, où $V = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{d+1}\}$ est affinement indépendant [1].

a. Montrer que V est l'ensemble des sommets de P.

b. Montrer que si $S \subseteq V$, alors $\mathrm{conv}(S)$ est une face de P.

c. En déduire que le treillis des faces $\mathcal{F}(P)$ est isomorphe au treillis des parties de V.

d. Calculer le nombre de faces de dimension k de P pour tout $0 \leq k \leq d$.

e. *En utilisant une translation, on peut supposer que l'origine se trouve à l'intérieur de P.* Montrer, à partir de la définition de polytope polaire, que P^* est également l'enveloppe convexe de $d+1$ points affinement indépendants. En déduire que $\mathcal{F}(P^*) \cong \mathcal{F}(P)$.

Exercice 2. Soit $n > d$ et $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des convexes de $\mathbb{R}^d$ tels que toute famille de $d+1$ de ces convexes possède une intersection non vide. Montrer que $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset$.

(Indice: on peut se servir du théorème de Radon et récurrence sur n)

Exercice 3. Soit P un polytope dans $\mathbb{R}^d$, et $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux sommets distincts de P. Montrer que le segment délimité par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est une face de P ssi il n'existe pas $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathrm{vert}(P) \setminus \{\vec{a}, \vec{b}\}$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{a} - \vec{b} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(\vec{v}_i - \vec{b}) \qquad \text{et} \qquad \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k > 0.$$

1. Rappel : On dit que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ est *affinement indépendant* si pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \text{ implique } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$