Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit D_n l'ensemble des diviseurs entiers positifs de n muni de la relation de divisibilité.

a. Montrer que la relation de divisibilité est un ordre (partiel).

b. Montrer que D_n est un treillis vérifiant

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad \text{et} \qquad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

pour tous $x, y, z \in D_n$.

c. Montrer que D_n est *auto-dual* : c'est-à-dire, montrer qu'il existe une fonction bijective $f : D_n \to D_n$ telle que $f(x) \leq f(y)$ ssi $x \geq y$.

Exercice 2. Soit T un treillis.

a. Montrer que, pour tous $t_1, \ldots, t_n \in T$,

$$t_1 \vee t_2 \vee \cdots \vee t_n \geq t_i \qquad \text{et} \qquad t_1 \wedge t_2 \wedge \cdots \wedge t_n \leq t_i$$

b. Montrer que, pour tous $x, y, z \in T$,

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad \text{et} \qquad x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

c. Pour chaque inégalité dans les parties précédentes, donner un exemple pour montrer que l'inégalité pourrait être stricte.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}$ une collection finie d'ensembles, et

$$U(\mathcal{C}) = \left\{ \bigcup_{E \in \mathcal{B}} E : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \right\}.$$

a. Montrer que $U(\mathcal{C})$ est un treillis. *(Il n'est pas nécessaire de donner l'opération $\wedge$.)*

b. Est-ce que tout treillis fini est de cette forme ?

Exercice 4. Soit E un ensemble fini. Montrer que chaque intervalle du treillis de partitions de E, noté Π_E, est isomorphe à un produit direct [1] de treillis de partitions.

1. Voir l'exercice 5 pour la définition de produit direct

Exercice 5. (Opérations sur les posets)

Soit T et S des treillis (disjoints).

a. Soit T^* l'ensemble ordonné *dual* de T : c'est-à-dire, l'ensemble T muni de l'ordre :

$$x \leq_{T^*} y \qquad \text{ssi} \qquad x \geq_T y.$$

Montrer que T^* est un treillis.

b. La *somme directe* de T et S, notée $T + S$, est l'union disjointe $T \cup S$ muni de l'ordre

$$x \leq y \qquad \text{ssi} \qquad \begin{array}{rl} (i) & x, y \in T \text{ et } x \leq_T y \,;\text{ ou} \\ (ii) & x, y \in S \text{ et } x \leq_S y. \end{array}$$

Montrer que $T + S$ est un treillis ssi $T = \emptyset$ ou $S = \emptyset$.

c. Soit $\widehat{T + S}$ l'ensemble ordonné obtenu en ajoutant un minimum et un maximum à $T + S$. Montrer que $\widehat{T + S}$ est un treillis.

d. Le *produit direct* ou *produit cartésien* de T et S, noté $T \times S$, est l'ensemble

$$T \times S = \{(t, s) : t \in T, s \in S\}$$

muni de l'ordre

$$(t, s) \leq (t', s') \qquad \text{ssi} \qquad t \leq_T t' \quad \text{et} \quad s \leq_S s'.$$

Montrer que $T \times S$ est un treillis.

e. Le *produit ordinal* ou *produit lexicographique* de T et S, notée $T \otimes S$, est l'ensemble

$$T \otimes S = \{(t, s) : t \in T, s \in S\}$$

muni de l'ordre

$$x \leq y \qquad \text{ssi} \qquad \begin{array}{rl} (i) & t = t' \text{ et } s \leq s' \,;\text{ ou} \\ (ii) & t < t'. \end{array}$$

Déterminer si $T \otimes S$ est un treillis.

Exercice 6. (Pour les fans de la théorie des catégories)

Soit $(P, \leq_P)$ un ensemble ordonné. On définit une catégorie $\mathcal{P}$ comme suit.

— Les objets de la catégorie sont les éléments de P ; c'est-à-dire, $\mathrm{Obj}(\mathcal{P}) = P$.

— Il existe une flèche notée i^x_y de x vers y ssi $x \leq_P y$; c'est-à-dire,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x,y) = \begin{cases} \{i^x_y\}, & \text{si } x \leq_P y, \\ \{\}, & \text{si } x \not\leq_P y. \end{cases}$$

— La composition est induite par la transitivité de l'ordre $\leq_P$:

$$i^y_z \circ i^x_y = i^x_z.$$

a. Vérifier que $\mathcal{P}$ est une catégorie.

b. Décrire les isomorphismes, les monomorphismes et les épimorphismes de $\mathcal{P}$.

c. (Produit dans $\mathcal{P}$) Montrer que le produit de deux objets x et y de $\mathcal{P}$ est la borne inférieure $x \wedge y$ de x et y dans P.

d. (Coproduit dans $\mathcal{P}$) Montrer que le coproduit de deux objets x et y de $\mathcal{P}$ est la borne supérieure $x \vee y$ de x et y dans P.

e. (Objet initial/final/nul) Est-ce que la catégorie $\mathcal{P}$ admet d'objet initial ? final ? nul ? Si oui, donner une description de l'objet en termes de l'ensemble ordonné $(P, \leq_P)$.

f. Décrire le produit fibré et la somme amalgamée dans $\mathcal{P}$.

g. Montrer que la donnée d'un foncteur $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ revient à donnée une fonction croissante $f : P \to P'$.
(Rappel : $f : P \to P'$ est croissante si $f(x) \leq_{P'} f(y)$ pour tous $x, y \in P$ tels que $x \leq_P y$).

h. Montrer que la donnée d'un foncteur contravariant $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ revient à donnée une fonction décroissante $f : P \to P'$.
(Rappel : $f : P \to P'$ est décroissante si $f(x) \geq_{P'} f(y)$ pour tous $x, y \in P$ tels que $x \leq_P y$).

i. Décrire les transformations naturelles entre deux foncteurs $F_1, F_2 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$.