Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Soit D_n l'ensemble des diviseurs entiers positifs de n muni de la relation de divisibilité. Sur la Feuille d'Exercice 1, vous avez montrer que D_n est un treillis distributif. Caractériser les ensembles ordonnés E tels que $J(E) \cong D_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit Y le treillis de Young.

a. Montrer que Y est un treillis distributif.
b. Déterminer les éléments de Y qui sont sup-irréductibles.

Exercice 3. Montrer qu'un treillis est distributif ssi pour tous x, y, z on a que

$$x \wedge y = x \wedge z \quad \text{et} \quad x \vee y = x \vee z \qquad \text{impliquent} \qquad y = z.$$

Exercice 4.

a. Montrer que le produit direct $T \times T'$ de deux treillis distributifs est un treillis distributif.
b. Montrer que tout sous-treillis d'un treillis distributif est un treillis distributifs.
c. Montrer que l'image d'un treillis distributif par un morphisme de treillis est distributif.
(g *est un* morphisme de treillis *si* $g(x \vee y) = g(x) \vee g(y)$ *et* $g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y)$ *pour tous* x, y.)
d. Soit E un ensemble ordonné et T un treillis distributif. Posons $\mathrm{Hom}(E, T)$ l'ensemble des applications croissantes de E dans T ordonnées par la relation d'ordre suivante :

$$f \leq g \qquad \text{ssi} \qquad f(x) \leq_E g(x) \text{ pour tout } x \in E.$$

Montrer que $\mathrm{Hom}(E, T)$ est un treillis distributif.

Exercice 5.

Définition. Un ordre total $\preceq$ sur l'ensemble E est appelé une *extension linéaire* de l'ensemble ordonné $(E, \leq)$ s'il vérifie la condition suivante pour tous $x, y \in E$:

$$x \leq y \quad \text{implique} \quad x \preceq y.$$

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné fini.

a. Montrer que tout ensemble ordonné fini possède au moins un élément minimal.
b. On définit une suite d'éléments de E comme suit :
- soit x_1 un élément minimal de E ;
- soit x_2 un élément minimal de $E \setminus \{x_1\}$;
- soit x_3 un élément minimal de $E \setminus \{x_1, x_2\}$;
- et ainsi de suite.

Montrer que l'ordre total $x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \cdots$ est une extension linéaire de $(E, \leq)$.
c. Montrer que toute extension linéaire de $(E, \leq)$ s'obtient de cette manière.

Exercice 6. Vrai ou faux : si toute chaîne et toute antichaîne d'un ensemble ordonné E est finie, alors E est finie.